

Mirosław GUZIK
Grzegorz KOSZŁKA

PORÓWNANIE WYBRANYCH SCHEMATÓW RÓŻNICOWYCH NA PRZYKŁADZIE RÓWNIANIA $\dot{x} = t + 2x$

SELECTED DIFFERENTIAL SCHEMES COMPARISON BY MEANS OF THE EQUATION $\dot{x} = t + 2x$

W artykule przedstawiono niektóre metody numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych na wybranym przykładzie. Dokonano próby porównania użytych schematów numerycznych pod względem dokładności i kosztu obliczeń.

Słowa kluczowe: schemat różnicowy, metody numeryczne, równanie różniczkowe

The article presents selected methods of numerical solving of ordinary differential equations. An attempt has been made to compare applied differential schemes in respect of their precision and their cost of computations.

Keywords: differential scheme, numerical method, differential equation

1. Wstęp

Budowa modeli matematycznych opisujących zjawiska w różnych dziedzinach wiedzy wiąże się najczęściej z koniecznością wykorzystania równań różniczkowych. Równania różniczkowe bardzo rzadko dają się rozwiązać metodami analitycznymi. Zdarza się to prawie wyłącznie w przykładach specjalnie dobranych do celów dydaktycznych. Istnieją jednak metody rozwiązywania równań różniczkowych za pomocą schematów różnicowych, które najczęściej są stosowane w modelach numerycznych. Schematy różnicowe różnią się pomiędzy sobą dokładnością i „kosztem” obliczeń, przekładającym się na czas obliczeń.

2. Obliczenia wybranymi schematami różnicowymi

Równanie różniczkowe pierwszego rzędu można zapisać w postaci $\dot{x} = f(t, x)$, gdzie t jest zmienną niezależną (najczęściej czas), natomiast $x = x(t)$. Za pomocą schematów różnicowych można znaleźć

przybliżone rozwiązanie równania różniczkowego w poszczególnych „chwilach” t , oddalonych od siebie o założony krok całkowania h . Rozwiązanie ma postać ciągu par liczb (t_k, x_k) , gdzie k oznacza kolejne liczby całkowite. Pierwsza para dana jest w postaci warunku początkowego $x(t_0) = x_0$.

Formalny rząd schematu określa się na podstawie wzoru Taylora, będącego rozwinięciem wyrażenia $x(t + h)$. Jest równy rzędowi najwyższych uwzględnionych w schemacie wyrazów. Im wyższy rząd schematu, tym większa dokładność obliczeń.

Wybór kroku całkowania w istotny sposób wpływa na dokładność rozwiązania, gdyż jest ono zbieżne do rozwiązania dokładnego przy $h \rightarrow 0$. W związku z tym, obliczenia każdym z rozpatrywanych schematów przeprowadzono z jednakowym krokiem $h = 0,2$. Jako warunek początkowy przyjęto $x(1) = 1$. Całkowanie przeprowadzono w granicach 1 do 5.

Obliczenia przeprowadzono za pomocą programu komputerowego napisanego w języku C++. W tekście znajdują się fragmenty kodu będące numeryczną realizacją rozpatrywanych schematów.

2.1. Otwarty schemat Eulera

Otwarty schemat Eulera wyraża się wzorem:

$$x_{k+1} = x_k + hf_k \quad (1)$$

gdzie: f_k oznacza wartość funkcji podcałkowej w punkcie (x_k, t_k) .

Do obliczenia przykładowego równania schematem Eulera posłużyły w programie poniższe funkcje:

```
float f(float t, float x){
return(t + 2.0 * x);
}

/*****/
float euler(float t, float x, float h){
return(x + h * f(t, x));
}
```

2.2. Otwarty schemat Taylora

Otwarty schemat Taylora dany jest wyrażeniem:

$$x_{k+1} = x_k + hf_k + \frac{h^2}{2} f_{t,k} + \frac{h^2}{2} f_{x,k} f_k \quad (2)$$

gdzie $f_{t,k}, f_{x,k}$ oznaczają odpowiednio wartości pochodnych f_t oraz f_x funkcji podcałkowej w punkcie (x_k, t_k) . Rząd schematu Taylora wynosi 2, ponieważ w rozwinięciu Taylora uwzględnia wyrazy rzędu h^2 .

Schemat został ujęty w następującym fragmencie programu:

```
float f(float t, float x){
return(t + 2.0 * x);
}
float ft(float t, float x){
return(1.0);
}
float fx(float t, float x){
return(2.0);
}

/*****/
float taylor(float t, float x, float h){
return(x + h * f(t, x) + h * h / 2.0
* (ft(t, x) + fx(t, x) * f(t, x)));
}
```

2.3. Zamknięty schemat, zwany schematem trapezów

Schemat jest dany następującym wzorem:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2} (f_k + f_{k+1}) \quad (3)$$

Nazwa wynika z faktu, iż w kolejnym kroku obliczeń do wartości x_k dodawane jest pole wycinka powierzchni znajdującej się pod wykresem funkcji podcałkowej, w kształcie trapezu o wysokości równej h .

W programie, schemat realizowany jest za pomocą poniższych funkcji:

```
float f(float t, float x){
return(t + 2.0 * x);
}

/*****/
float trapez(float t, float x, float h){
return((x + h / 2.0 * (f(t, x) + t + h)) / (1.0 - h));
}
```

Czteropozomowy, otwarty schemat Rungego-Kutty

W celu porównania, wybrano jeden z najpopularniejszych otwartych, 4-poziomowych schematów Rungego-Kutty, dany wzorami:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (4)$$

$$K_1 = f(t_k, x_k)$$

$$K_2 = f(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2} K_1)$$

$$K_3 = f(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2} K_2)$$

$$K_4 = f(t_k + h, x_k + h K_3)$$

Schemat jest 4-tego rzędu, więc w rozwinięciu Taylora uwzględnia wyrazy do h^4 .

Został zrealizowany w następującym fragmencie programu:

```
float f(float t, float x){
return(t + 2.0 * x);
}

/*****/
float runkut(float t, float x, float h){
float k1, k2, k3, k4;
k1 = f(t, x);
k2 = f((t + h / 2.0), (x + h / 2.0 * k1));
k3 = f((t + h / 2.0), (x + h / 2.0 * k2));
k4 = f((t + h), (x + h * k3));

return(x + h / 6.0 * (k1 + 2.0 * k2 + 2.0 * k3 + k4));
}
```

3. Obliczenia metodą ze zmiennym krokiem

Obliczenia metodą ze zmiennym krokiem przeprowadzono za pomocą następującego algorytmu całkowania:

1. Dane są trzy wartości $\{t_k, x_k, h_0\}$, gdzie (t_k, x_k) jest punktem na przybliżonej krzywej całkowej, a h_0 krokiem całkowania.
2. Przy użyciu wybranego schematu różnicowego, wyznaczane są wartości x_{k+1} i x_{k+2} , całkując dwukrotnie z krokiem h_0 z punktu (t_k, x_k) oraz wartość ω_{k+2} , całkując z krokiem $2h_0$.
3. Wykorzystując wartości ω_{k+2} , x_{k+2} i h_0 obliczane jest wyrażenie:

$$\gamma \approx \left(\frac{E_g h / (T - t_0)}{|\omega_{k+1} - x_{k+1}| / (2^p - 1)} \right)^{1/(p+1)} \quad (5)$$

gdzie: E_g – założona dokładność obliczeń, p – rząd schematu, T – górna granica całkowania.

Wyznaczana jest nowa wartość kroku: $h_1 = c\gamma h_0$, gdzie c jest to współczynnik mający na celu ograniczenie zbyt częstych zmian długości kroku. Zwykle przyjmuje się $c=0,8$ z dodatkowym ograniczeniem $0,2h_0 \leq h_1 \leq 5h_0$.

4. Jeśli $h_1 < h_0$, to sprawdzany jest warunek:

$$\frac{|x_{k+1} - \omega_{k+1}|}{2^p - 1} \leq E_g \frac{h}{T - t_0}, \quad z \quad h = h_0 \quad (6)$$

Jeśli jest spełniony, to wartości x_{k+1} , x_{k+2} są akceptowane jako rozwiązanie i obliczenia są kontynuowane od punktu 1) z wartościami $\{t_{k+2}, x_{k+2}, h_0\}$. Jeśli warunek nie jest spełniony, to wartości x_{k+1} i x_{k+2} są odrzucane i obliczenia są powtarzane od punktu 1) z wartościami $\{t_k, x_k, h_1\}$.

5. Jeśli $h_1 > h_0$, to wartości x_{k+1} i x_{k+2} są akceptowane jako rozwiązanie, a obliczenia są kontynuowane od punktu 1) z wartościami $\{t_{k+2}, x_{k+2}, h_1\}$.

Ze względu na dużą objętość nie zamieszczono w artykule kodu realizującego w programie powyższą metodę.

Wyjściowy krok obliczeń przyjęto $h_0 = 0,2$. Obliczenia przeprowadzono stosując w punkcie 2) wszystkie z poprzednio rozpatrywanych schematów numerycznych.

W metodzie ze zmiennym krokiem, błąd obliczeń E_g jest zakładany przed wykonaniem obliczeń. Do obliczenia konkretnych wartości zmiennej x w każdym obiegu pętli programu, wykorzystywany jest przyjęty schemat różnicowy. Algorytm dostosowuje długość kroku obliczeń tak, aby przy zastosowaniu konkretnego schematu uzyskać wartość obliczanej zmiennej z błędem mniejszym lub równym od założonego.

Zatem za pomocą tej metody można porównywać ze sobą poszczególne schematy różnicowe, a za miarę ich oceny przyjąć:

- a) liczbę wykonanych kroków w metodzie,
- b) wielkość założonego błędu wyników.

Większa liczba kroków wykonana przez program świadczy o mniejszej dokładności zastosowanego schematu różnicowego.

4. Analiza wyników

4.1. Wyniki obliczeń uzyskane za pomocą schematów Eulera, Taylora, trapezów i Rungego-Kutty

Wyniki porównano z dokładnym rozwiązaniem, danym równaniem:

$$x(t) = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{7}{4} \frac{e^{2t}}{e^2} \quad (7)$$

Wyniki otrzymane w obliczeniach za pomocą pierwszych czterech schematów zamieszczono w tab. 1. Otrzymane wyniki ilustruje wykres zamieszczony na rys. 1.

4.2. Porównanie rozpatrywanych schematów w obliczeniach metodą ze zmiennym krokiem

Posługując się w metodzie ze zmiennym krokiem schematem Taylora 2-go rzędu, do osiągnięcia wyników z założonym błędem 10-3, potrzebne było wykonanie 810 kroków.

Wykorzystując w metodzie zamknięty schemat trapezów, do uzyskania tej samej dokładności wyników, wystarczyło 597 kroków obliczeń.

Przy zastosowaniu w metodzie 4-poziomowego schematu różnicowego Rungego-Kutty, do uzyskania wyników z błędem tego samego rzędu, program wykonał zaledwie 28 kroków.

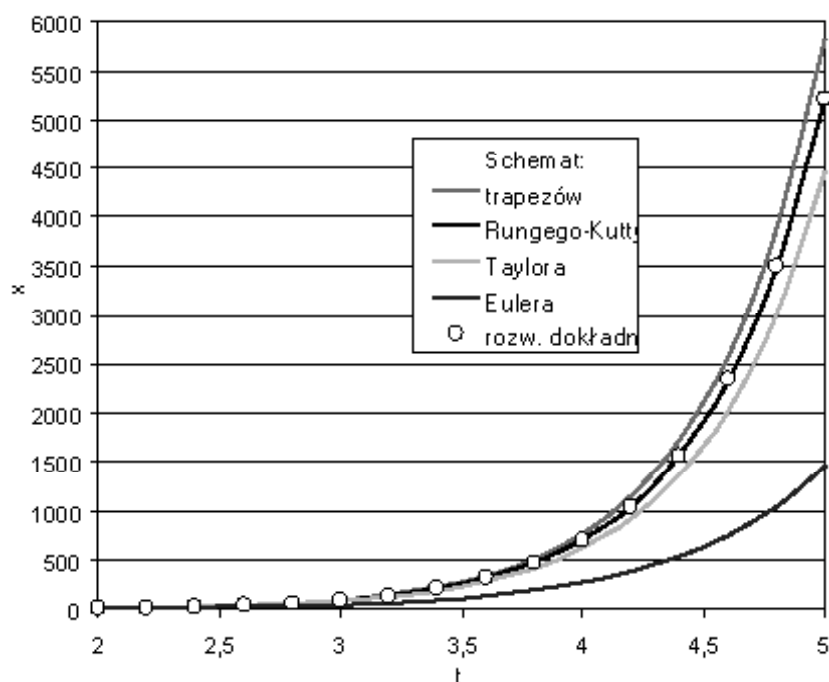
Stosując w metodzie schemat Eulera, dopuszczono 10-krotnie większy błąd obliczeń. Wykonano 150 000 kroków, co wystarczyło na uzyskanie wyników jedynie do wartości zmiennej niezależnej $t = 2,86757$. Wraz ze wzrostem wartości zmiennej niezależnej t , bardzo silnie malała długość kroku h i po wykonaniu ok. 3000 kroków była ona rzędu 3×10^{-7} .

5. Wnioski

Najmniejszym kosztem obliczeń spośród rozpatrywanych metod charakteryzuje się otwarty schemat Eulera. Jednak otrzymane wyniki, przy założonym kroku obliczeń, bardzo odbiegają od dokładnego rozwiązania. Większą dokładność wyników można

Tab. 1. Wyniki obliczeń rozwiązania równania za pomocą poszczególnych schematów różnicowych
 Tab. 1. Results of solving computations of the equation by means of individual differential schemes

t	x rozwiązanie dokładne	x -wyznaczone metodą:			
		Eulera	Taylora	trapezów	Rungego-Kutty
1,0	1,0	1	1	1	1
1,2	1,8	2	2	2	2
1,4	2,9	2	3	3	3
1,6	4,8	4	5	5	5
1,8	7,5	6	7	8	8
2,0	11,7	8	11	12	12
2,2	17,9	12	17	19	18
2,4	27,3	17	26	28	27
2,6	41,4	24	39	43	41
2,8	62,4	35	58	66	62
3,0	93,8	49	86	99	94
3,2	140,7	69	129	150	141
3,4	210,7	97	191	225	211
3,6	315,2	137	284	339	315
3,8	471,1	192	421	509	471
4,0	703,8	270	624	764	703
4,2	1050,9	379	925	1147	1050
4,4	1568,8	531	1370	1722	1567
4,6	2341,5	744	2029	2584	2339
4,8	3494,2	1043	3004	3877	3490
5,0	5213,9	1461	4446	5816	5208



Rys. 1. Wykres przedstawiający rozwiązanie równania za pomocą poszczególnych schematów różnicowych
 Fig. 1. Graph showing a solution of the equation by means of individual differential schemes

uzyskać stosując mniejszy krok obliczeń, jednak przyjęcie nawet skrajnie małego kroku w kilku tysiącach cykli obliczeń, nie zbliżyło zadawalająco rozwiązania tym schematem do rozwiązania dokładnego.

W otwartym schemacie Taylora uwzględniane są wyrazy rzędu h^2 w rozwinięciu Taylora. Przyczynia się to do znacznie większej dokładności obliczeń. Konieczne staje się jednak obliczenie dwóch pochodnych cząstkowych równania w każdym kroku obliczeń, co zwiększa koszt obliczeń numerycznych.

Jeszcze bliższy dokładnemu rozwiązaniu jest zamknięty schemat zwany schematem trapezów. Jednak jego zastosowanie wymaga rozwiązania równania, w którym obliczana wartość w danym kroku obliczeń, znajduje się po obu stronach znaku równości. Jest to szczególnie kłopotliwe przy rozwiązywaniu równań nieliniowych, gdyż obliczenia w każdym kroku trzeba wykonywać „metodą kolejnych przybliżeń”. W przypadku rozpatrywanego, przykładowego równania różniczkowego, możliwe było wyrugowanie obliczanej zmiennej x_{k+1} , dzięki czemu koszt obliczeniowy tego

schematu nie był większy od kosztu otwartego schematu Eulera.

Najdokładniejsze wyniki uzyskano stosując czteropozomowy, otwarty schemat Rungego-Kutty. Uzyskane wyniki na przedstawionym wykresie (rys. 1) pokrywają się z rozwiązaniem dokładnym. Metoda ta charakteryzuje się niskim kosztem obliczeń przy dużej dokładności. Wywołanie funkcji, obliczającej tym schematem rozwiązanie równania w każdym kroku, wygląda identycznie jak wywołanie funkcji obliczającej schematem Eulera. Zatem nie wpływa na pogorszenie czytelności lub skomplikowanie kodu programu.

Zastosowanie rozpatrywanych schematów różnicowych w metodzie ze zmiennym krokiem potwierdziło dokładność schematu Rungego-Kutty. Wykazało ponadto, że zmniejszanie kroku całkowania w schematach niższego rzędu, jakim jest np. schemat Eulera, nie zawsze pozwala uzyskać zadawalającą dokładność obliczeń. Było to możliwe tylko w początkowym, wąskim przedziale całkowania.

6. Literatura

- [1] Palczewski A.: *Równania różniczkowe zwyczajne, teoria i metody numeryczne z wykorzystaniem komputerowego systemu obliczeń symbolicznych*. WNT, Warszawa, 2004.
- [2] Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J.: *Metody numeryczne*. WNT, Warszawa, 2005.
- [3] Grębosz J.: *Symfonia C++*. Oficyna Kallimach, Kraków, 2004.

Mgr inż. Mirosław GUZIK
Dr inż. Grzegorz KOSZAŁKA

Katedra Silników Spalinowych i Transportu
Politechnika Lubelska
ul. Nadbystrzycka 36
20-618 Lublin
tel. 081 538 12 59
e-mail: mirguzik@op.pl, g.koszalka@pollub.pl
