

**Krzysztof Kęcik**

**Andrzej Mitura**

**Jerzy Warmiński**

## **Analiza efektywności autoparametrycznego wahadłowego tłumika drgań**

**Abstrakt:** W pracy przedstawiono analizę dynamiki autoparametrycznego układu składającego się z oscylatora wraz z dołączonym eliminatorem drgań w postaci wahadła. W celu uzyskania obszarów rezonansu autoparametrycznego zastosowano metodę bilansu harmonicznych. Wyznaczono analitycznie, a następnie zweryfikowano numerycznie warunek pełnej eliminacji drgań. Dodatkowo, przedstawiono wpływ tłumienia oscylatora i wahadła na zjawisko eliminacji drgań oraz dynamikę układu.

**Słowa kluczowe:** *drzania, wahadło, eliminacja, tłumienie, rezonans*

### **1. Wstęp**

Problem redukcji nadmiernych drgań jest znany od wielu lat, lecz wciąż jest atrakcyjnym problemem naukowym. Dynamiczne tłumiki drgań (DTD) są specjalnymi urządzeniami składającymi się z masy zamontowanej na sprężynach i tłumikach.

W klasycznej teorii tego typu eliminatory drgań wraz z układem podstawowym są modelowane, jako układy masowo sprężyste. Jednak inne rodzaje dynamicznych tłumików także stanowią interesującą klasę układów dynamicznych z inżynierskiego punktu widzenia.

W szczególności wahadłowe układy odgrywają bardzo ważną rolę w wielu dziedzinach takich jak budowa maszyn, transport i budownictwo. Jednak, dynamika wahadłowego tłumika drgań jest znacznie bardziej złożona i skomplikowana niż szeroko stosowane klasyczne tłumiki drgań.

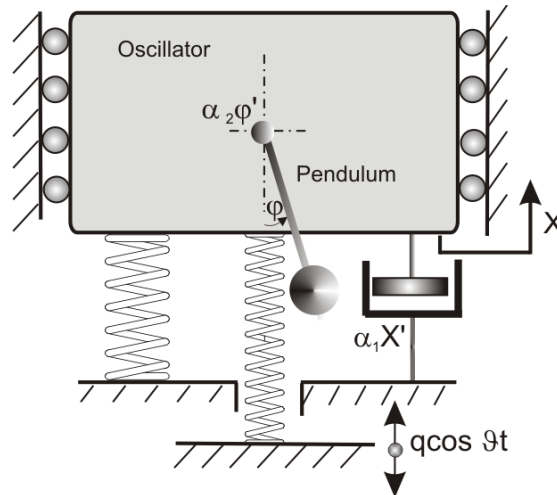
Autoparametryczne wahadłowe tłumiki drgań (AWTD) są urządzeniami przeznaczonymi do pochłaniania energii z układu podstawowego (elementu, w którym chcemy zredukować drgania). Efekt dynamicznej eliminacji drgań jest satysfakcjonujący tylko w pewnym zakresie częstości wymuszenia [1]. W przeciwieństwie do klasycznych eliminatorów drgań, wahadłowe tłumiki drgań nie powodują wzbudzenia drgań o dużych amplitudach w innych częstościach wymuszania. Ma to związek ze wąskim zakresem częstości wymuszenia wahadła, wzbudzenie drgań występuje zwykle поблизу stosunku częstości  $\frac{1}{2}$  [2, 6, 8].

Wiele naukowych prac w ostatnim dziesięcioleciu analizuje różnego rodzaju typy dynamicznych tłumików drgań. Niektóre wahadłowe tłumiki drgań zastosowano w praktyce, wysokich wieżach, kominach, konstrukcjach budowlanych (budynkach i mostach), gdzie mają za zadanie eliminować drgania pochodzące od wiatru lub spowodowane trzęsieniami ziemi [5]. Przegląd wielu dynamicznych tłumików drgań oraz ich praktyczne zastosowanie można znaleźć w pracy Sun-a [7].

Praca przedstawia analizę dynamiki wahadłowego tłumika drgań zamontowanego na oscylatorze. W tego typu układzie dynamicznym różnego rodzaju dynamika jest możliwa: periodyczna, prawie-okresowa, chaotyczna a nawet rotacja wahadła [9]. Szczególnie przejście do rotacji wahadła lub zjawiska chaosu może powodować nadmiernego wzrost amplitudy drgań, co może spowodować uszkodzenia urządzenia. Intuicyjnym zapobiegnięciem wydaje się być zwiększenie tłumienia w układzie. Wyniki przedstawione w pracy oszacowują jak tłumienie w autoparametrycznym dynamicznym tłumiku drgań (tłumienie wahadła i oscylatora) wpływa na efekt dynamicznej eliminacji drgań. Dodatkowo, na podstawie wyników można przygotować algorytm sterowania układem.

## 2. Model AWTD

Przejdźmy do analizy wahadłowego tłumika drgań zamocowanego do tłumionego oscylatora. Oscylator jest wymuszany za pomocą harmoniczej siły  $F(t)$  z amplitudą wymuszenia  $q$  i częstością wymuszenia  $\vartheta$  w pobliżu głównego rezonansu parametrycznego. Zawieszenie układu podstawowego składa się z liniowej sprężyny o sztywności zredukowanej do wartości jeden w układzie bezwymiarowym oraz z funkcji wiskotycznego tłumienia  $\alpha_1 X'$ . Natomiast tłumienie w zawieszeniu wahadła jest opisane za pomocą liniowej funkcji  $\alpha_2 \varphi'$ .



Rysunek 1. Schemat autoparametrycznego wahadłowego tłumika drgań.

Wyprowadzenie wymiarowych równań różniczkowych ruchu układu autoparametrycznego o dwóch stopniach swobody otrzymano na podstawie równań Lagrange'a drugiego rzędu i są one przedstawione w pracy [9]. Bezwymiarowa forma tych równań ma postać:

$$X'' + \alpha_1 X' + X + \mu \lambda (\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi) = q \cos \vartheta \tau, \quad (1)$$

$$\varphi'' + \alpha_2 \varphi' + \lambda (X'' + 1) \sin \varphi = 0. \quad (2)$$

Drugie równanie odpowiada ruchowi wahadła, natomiast pierwsze podukładowi wzbudzanemu (oscylatorowi). Parametry  $\mu$  i  $\lambda$  odpowiadają parametrom wahadła, oraz wpływają na wartość sprzężenia bezwładnościowego wahadła i oscylatora. Szczegółowa analiza i definicja bezwymiarowych parametrów jest przedstawiona w pracy [10].

### 3. Parametryczna analiza tłumienia

#### 3.1 Metoda Bilansu Harmonicznych

Metoda bilansu harmonicznego (MBH) została wykorzystana do znalezienia przybliżonych rozwiązań w pobliżu głównego rezonansu. Założono pierwsze przybliżenie rozwiązań

$$x(\tau) = A(\tau) \cos[\varrho\tau + \phi_1], \quad \varphi(\tau) = B(\tau) \cos\left[\left(\frac{\varrho}{2}\right)\tau + \phi_2\right], \quad (3)$$

gdzie  $A(\tau)=A$ ,  $B(\tau)=B$  oraz  $\phi_1$  i  $\phi_2$  są odpowiednio amplitudami i przesunięciami fazowymi oscylatora i wahadła. Wstawiając równanie (3) oraz rozwijając nieliniowe funkcje ( $\sin\varphi$  i  $\cos\varphi$ ) w szereg Taylora (przyjmując dwa pierwsze rozwinięcia) dla stanów ustalonych otrzymano równania algebraiczne:

$$(1 - \varrho^2)A - \mu\lambda(\varrho/2)^2 B^2 \cos(2\phi_2 - \phi_1) = q \cos \phi_1, \quad (4)$$

$$-\varrho\alpha_1 A + \mu\lambda(\varrho/2)^2 B^2 \sin(2\phi_2 - \phi_1) = q \sin \phi_1, \quad (5)$$

$$(\varrho/2)^2 - \lambda + (\lambda/8)B^2 + A(\lambda\varrho^2/2)\cos(2\phi_2 - \phi_1) = 0, \quad (6)$$

$$\alpha_2(\varrho/2) + A(\lambda\varrho^2/2)\sin(2\phi_2 - \phi_1) = 0. \quad (7)$$

Po kilku matematycznych przekształceniach otrzymano zależności na przesunięcia fazowe:

$$\operatorname{tg} \phi_1 = \frac{4\varrho(4A^2\alpha_1 + B^2\alpha_2\mu)}{16A^2(\varrho^2 - 1) - B^2\mu((B^2 - 8)\lambda + 2\varrho^2)}, \quad \operatorname{tg}[2\phi_2 - \phi_1] = \frac{\alpha_2(\varrho/2)}{(\varrho/2)^2 - \lambda + (\lambda/8)B^2}, \quad (8)$$

oraz równoważne wyrażenia opisujące amplitudy oscylatora:

$$A^2 = \frac{B^4}{16\varrho^4} + \frac{B^2}{16\lambda^2\varrho^4}(4\lambda\varrho^2 - 16\lambda^2) + \frac{(64\lambda^2 - 32\varrho^2\lambda + 4\varrho^4 + 16\varrho^2\alpha_2^2)}{16\lambda^2\varrho^4}, \quad (9)$$

$$A^2 = B^4 \frac{(2\lambda\mu(\varrho^2 - 1) - \lambda^2\mu^2\varrho^4)}{16(\varrho^4 + (\alpha_1^2 - 2)\varrho^2 + 1)} + B^2 \frac{(16\lambda\mu(1 - \varrho^2) + 4\mu\varrho^2(\varrho^2 - 1 - 2\alpha_1\alpha_2))}{16(\varrho^4 + (\alpha_1^2 - 2)\varrho^2 + 1)} + \frac{q}{(\varrho^4 + \varrho^2(\alpha_1^2 - 2) + 1)}. \quad (10)$$

Porównując powyższe amplitudy otrzymano wyrażenie opisujące amplitudę wahadła

$$B^4 \left[ \frac{-\lambda^2\mu^2\varrho^4 + 2\lambda\mu(-1 + \varrho^2)}{16(1 + (-2 + \alpha_1^2)\varrho^2 + \varrho^4)} - \frac{1}{16\varrho^4} \right] + B^2 \left[ \frac{16\lambda\mu(1 - \varrho^2) + 4\mu\varrho^2(\varrho^2 - 1 - 2\alpha_1\alpha_2)}{16(1 + (-2 + \alpha_1^2)\varrho^2 + \varrho^4)} + \frac{16\lambda^2 - 4\lambda\varrho^2}{16\lambda^2\varrho^4} \right] + \left[ \frac{q^2}{1 + \varrho^2(-2 + \alpha_1^2) + \varrho^4} - \frac{64\lambda^2 - 32\lambda\varrho^2 + 4(4\alpha_2^2\varrho^2 + \varrho^4)}{16\lambda^2\varrho^4} \right] = 0. \quad (11)$$

Opis szczegółowy zastosowanej metody bilansu harmonicznego oraz analiza stabilności otrzymanych rozwiązań jest pokazana w pracy [10]. Warto zaznaczyć, że zastosowana metoda daje wyniki najbardziej poprawne dla słabej nieliniowości.

### 3.2 Efekt pełnej eliminacji drgań (EPED)

Jeżeli założymy  $A=0$  (brak drgań oscylatora) w równaniach (4)-(7), to algebraiczne równania przyjmą postać:

$$-\mu\lambda(\mathcal{G}/2)^2 B^2 \cos(2\phi_2 - \phi_1) = q \cos \phi_1, \quad (12)$$

$$\mu\lambda(\mathcal{G}/2)^2 B^2 \sin(2\phi_2 - \phi_1) = q \sin \phi_1, \quad (13)$$

$$(\mathcal{G}/2)^2 - \lambda + (\lambda/8)B^2 = 0, \quad (14)$$

$$\alpha_2(\mathcal{G}/2) = 0. \quad (15)$$

Analizując równanie (15), możemy wywnioskować, że efekt pełnej eliminacji drgań oscylatora zachodzi wówczas, gdy tłumienie wahadła  $\alpha_2=0$ , lub gdy układ nie drga (trywialne rozwiązanie  $A=0$ ,  $B=0$  i  $\mathcal{G}=0$ ). Wówczas amplituda wahadła może być wyznaczona z równań (12)-(13) i (14)

$$B_1^2 = \frac{q}{\mu\lambda(\mathcal{G}/2)^2}, \quad B_2^2 = \frac{8\lambda - 8(\mathcal{G}/2)^2}{\lambda}. \quad (16)$$

Porównując amplitudy z równania (16), otrzymano dwie zależności na częstotliwości wymuszenia:

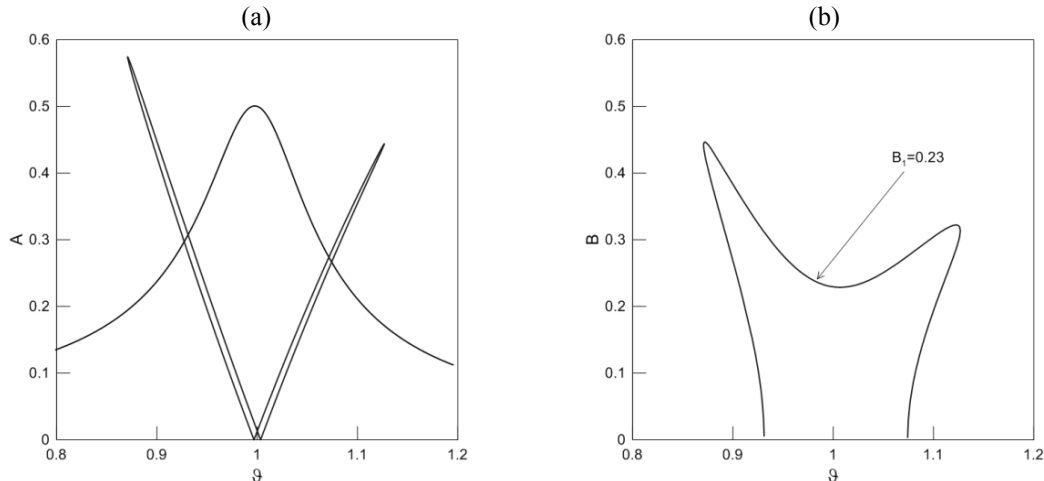
$$\mathcal{G}_1 = \sqrt{2\lambda + \frac{\sqrt{2}\sqrt{2\lambda^2\mu^2 - \mu q}}{\mu}}, \quad \mathcal{G}_2 = \sqrt{2\lambda - \frac{\sqrt{2}\sqrt{2\lambda^2\mu^2 - \mu q}}{\mu}}. \quad (17)$$

Jednakże, częstota  $\mathcal{G}_2$  znajduje się poza obszarem głównego rezonansu parametrycznego. Dlatego amplituda  $\mathcal{G}_1$  oznacza rzeczywistą częstota wymuszenia, przy której zachodzi efekt pełnej eliminacji drgań.

## 4. Efekt eliminacji drgań

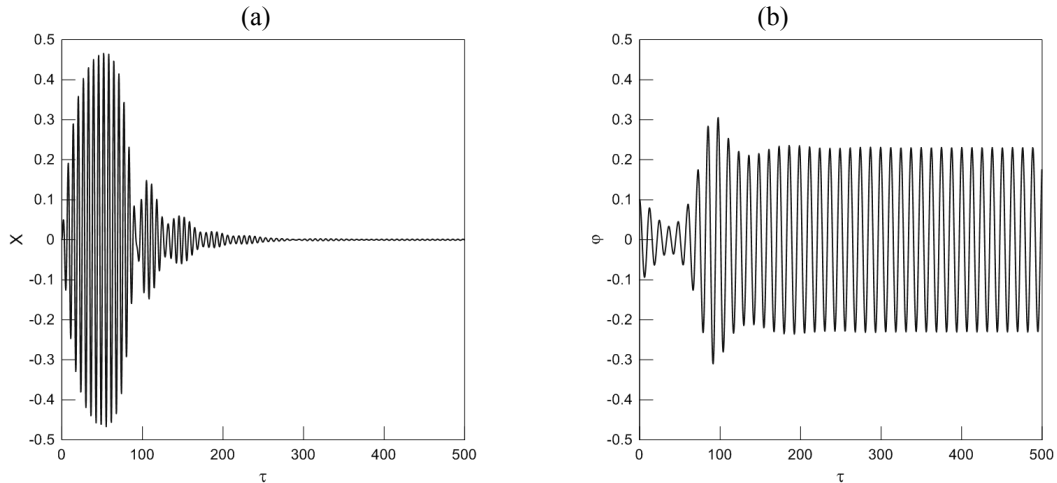
### 4.1 Analiza efektu pełnej eliminacji drgań.

Na początku będziemy analizować EPED oscylatora. Dla danych z pracy [10],  $\alpha_1=0.1$ ,  $\alpha_2=0$ ,  $\mu=15.2$ ,  $\lambda=0.25$ ,  $q=0.05$ , częstota wymuszenia (wyznaczona analitycznie), przy której zachodzi pełna eliminacja drgań wynosi  $\mathcal{G}_1=0.997$ , oraz amplituda drgań wahadła wynosi  $B_1=0.23$  (wyznaczona analitycznie). Krzywe rezonansowe (otrzymane z równań (9)-(11)) pokazujące ten efekt są przedstawione na rysunku 2. W pobliżu  $\mathcal{G}=1$ , zachodzi dynamiczna eliminacja drgań oscylatora powodowana przez wahadło. Krzywe analityczne zostały zweryfikowane również za pomocą badań numerycznych i doświadczalnych [10].



Rysunek 2. Analityczne krzywe rezonansowe pokazujące dla zjawisko pełnej eliminacji drgań.

Rysunek 3 przedstawia numeryczną weryfikację EPED. Amplituda oscylatora dąży do zera, (Rysunek 3a), natomiast wahadło wykonuje okresowe wahania z amplitudą  $\varphi=0.23$ , co jest zgodne z analitycznymi wynikami. Możemy również, zauważyć, że stosunek częstości drgań pomiędzy oscylatorem i wahadłem wynosi dwa. Warunki początkowe, z jakimi wykonano symulacje wyniosły  $\varphi=0.1$ ,  $\varphi'=0$ ,  $x=0$  oraz  $x'=0$ .



Rysunek 3. Numeryczna weryfikacja efektu pełnej eliminacji drgań dla  $\vartheta=0.997$ , przebieg czasowy oscylatora (a) and oraz wahadła (b).

Jeżeli wahadło nie drga (tzn.  $B=0$ ), wówczas stanowi dodatkową masę oscylatora. Wartość amplitudy drgań takiego układu można wyznaczyć na podstawie klasycznego wzoru na amplitudę drgań wymuszonych i tłumionych liniowego oscylatora

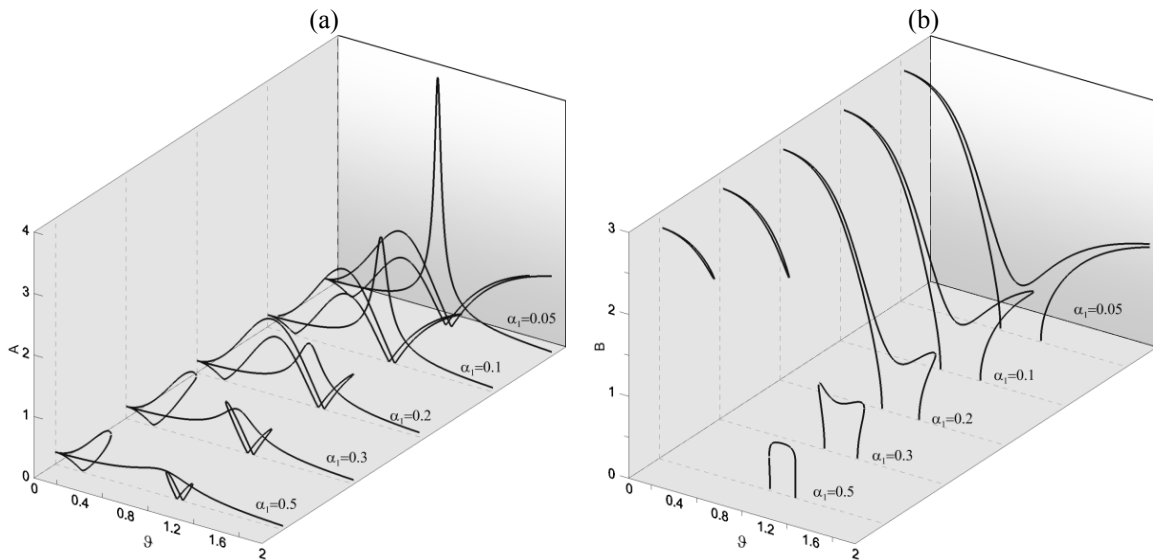
$$A = \frac{q}{\sqrt{1 + (\alpha_1^2 - 2)\vartheta^2 + \vartheta^4}}. \quad (18)$$

Wyrażenie (18) jest identyczne jak formuła otrzymana z równań (4)-(7), jeżeli wstawimy  $B=0$ . W naszym przypadku amplituda, dla częstości wymuszenia  $\vartheta=0.997$  amplituda drgań oscylatora wyniosła  $A=0.5$  co jest zgodne z wynikiem przedstawionym na rysunku 2a.

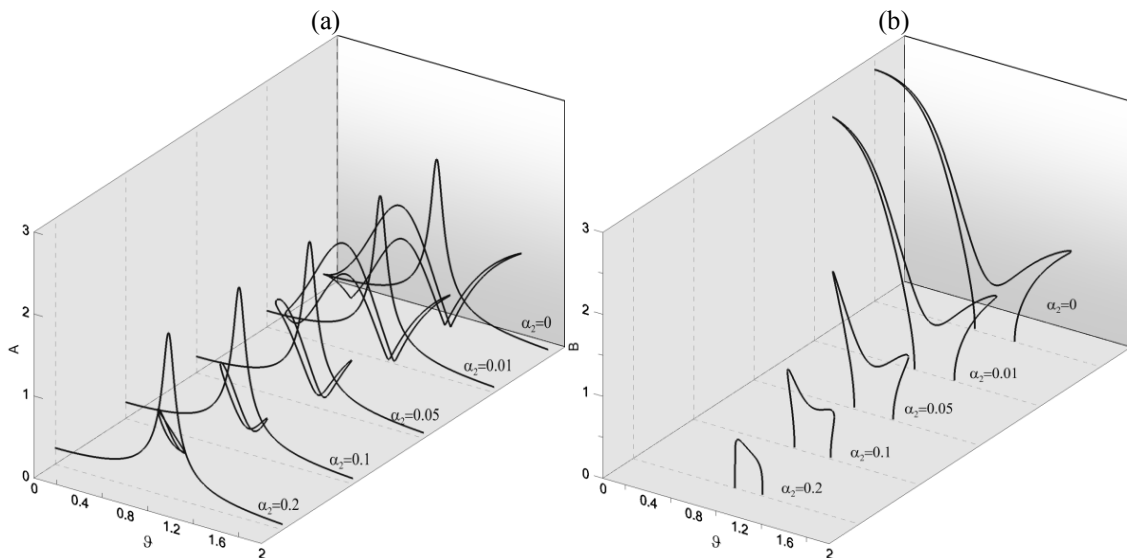
#### 4.2 Wpływ tłumienia na efekt dynamicznej eliminacji drgań

W praktyce przypadek EPED jest praktycznie niemożliwy do otrzymania, ze względu na zawsze występujące tarcie w zawieszeniu wahadła. W tym rozdziale będziemy analizować wpływ tłumienia na efekt dynamicznej eliminacji drgań. Na rysunku 4 przedstawiono wpływ tłumienia oscylatora na drgania oscylatora (rysunek 4a) i drgania wahadła (rysunek 4b). Interesujące wydaje się być to, że wzrost tłumienia oscylatora nie eliminuje całkowicie, tylko redukuje zjawisko dynamicznej eliminacji drgań. Jest to bardzo ważne z praktycznego punktu widzenia. Ten parametr może być wykorzystany do kontroli dynamiki układu z zachowaniem efektywnej eliminacji drgań.

Natomiast, wzrost tłumienia w zawieszeniu wahadła wpływa na redukcję amplitudy drgań wahadła (rysunek 5b), ale obszar, w którym zachodzi zjawisko dynamicznej eliminacji drgań został również zredukowany. Oznacza to, że tłumienie wahadła może obniżać skuteczność wahadłowego tłumika drgań.



Rysunek 4. Wpływ tłumienia oscylatora na efekt dynamicznej eliminacji drgań (a) oraz na dynamikę wahadła (b) dla  $\alpha_2=0.002$ ,  $\mu=6$ ,  $\lambda=0.3$ ,  $q=0.2$ .



Rysunek 5. Wpływ tłumienia wahadła na efekt dynamicznej eliminacji drgań (a) oraz na dynamikę wahadła (b) dla  $\alpha_1=0.1$ ,  $\mu=6$ ,  $\lambda=0.3$ ,  $q=0.2$ .

Otrzymane wyniki pokazują, że najlepszy efekt dynamicznej eliminacji drgań zachodzi dla wąskiego zakresu tłumień i ponadto obszar ten jest zlokalizowany w pobliżu głównego rezonansu parametrycznego. Dlatego wahadłowy tłumik drgań powinien być odpowiedni zaprojektowany ze szczególnym uwzględnieniem tłumienia wahadła oraz tłumienia oscylatora. Eksperymentalna i numeryczna weryfikacja powyższych wyników została przedstawiona w pracach [3, 4].

## 5. Wnioski i podsumowanie końcowe

Efekt dynamicznej eliminacji drgań za pomocą autoparametrycznego wahadłowego tłumika drgań był analizowany w tej pracy. W tego typu układzie, dynamika całego układu zależy od sprzężenia obu podukładów. W pobliżu głównego rezonansu parametrycznego został wykryty najefektywniejszy obszar, w którym zachodzi dynamiczna eliminacja drgań. Badania analityczne i numeryczne pokazały, że przypadek pełnej dynamicznej eliminacji

drgań jest możliwy, jeżeli nie ma tłumienia w zawieszeniu wahadła. Wahadłowy tłumik drgań jest najbardziej efektywny przy odpowiednim dostrojeniu obu podukładów.

Analiza tłumienia wykazała, że wzrost tłumienia w zawieszeniu wahadła redukuje lub eliminuje efekt dynamicznej eliminacji drgań, podczas gdy wzrost tłumienia oscylatora jedyni redukuje to zjawisko. Dlatego, sterowanie AWTD za pomocą tłumienia oscylatora wygląda obiecująco. Inteligentne zawieszenie składające się ze sprężyny wykonanej ze stopu z pamięcią kształtu oraz tłumika magnetoreologicznego prowadzące do opracowania aktywnego wahadłowego tłumika drgań będzie następnym etapem badań.

**Podziękowania:** Praca jest finansowana z grantu nr 0234/IP2/2011/71 Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego w latach 2012-2014.

## Literatura

1. Guskov A M, Panovko G Y, Van Bin C. Analysis of the Dynamics of a Pendulum Vibration Absorber. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability* 2008; 37(4): 321–329.
2. Hatwall H, Mallik A K, Ghos A. Non-linear vibrations of a harmonically excited autoparametric system. *Journal of Sound and Vibration* 1980; 81(2): 153-164.
3. Kecik K, Warminski J. Dynamics of an autoparametric pendulum-like system with a nonlinear semiactive suspension. *Mathematical Problems in Engineering* 2011: Article ID 451047:1-18.
4. Kęcik K. Zastosowanie tłumika magnetoreologicznego do sterowania drganiami w układzie mechanicznym z wahadłem. *Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review)* 2012; 2, 2012: 223-226.
5. Korenev B G, Reznikov L M. *Dynamic vibration absorbers, theory and technical applications*, John Wiley & Sons, 1993.
6. Nabergoj R, Tondl A, Virag Z. Autoparametric Resonance in an Externally Excited System. *Chaos, Solitons, Fractals* 1990; 4: 263–273.
7. Sun J Q, Jolly M R, Norris M A. Passive adaptive and active tuned vibration absorbers – a survey. *Transaction of ASME* 1995; 117: 234-242.
8. Warminski J, Kecik K. Autoparametric vibrations of a nonlinear system with pendulum. *Mathematical Problems in Engineering* 2006; Article ID 80705: 1-19.
9. Warminski J, Kecik K. Instabilities in the main parametric resonance area of a mechanical system with a pendulum. *Journal of Sound Vibration* 2009; 332: 612-628.
10. Warminski J, Lenci S, Cartmell M P, Rega R and Wiercigroch M. *Nonlinear Dynamic Phenomena in Mechanics*. Springer 2012, 181.

**Krzysztof Kecik, PhD (Eng.)**  
**Andrzej Mitura, PhD (Eng.)**  
**Jerzy Warminski, Prof. DSc, PhD (Eng.)**  
Faculty of Mechanical Engineering  
Lublin University of Technology  
Nadbystrzycka 36, 20-816 Lublin, Poland  
E-mail: [k.kecik@pollub.pl](mailto:k.kecik@pollub.pl)  
E-mail: [a.mitura@pollub.pl](mailto:a.mitura@pollub.pl)  
E-mail: [j.warminski@pollub.pl](mailto:j.warminski@pollub.pl)