

## Robert Pilch

Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie  
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki  
Katedra Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn  
Al. A. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, Polska  
E-mail: [pilch@agh.edu.pl](mailto:pilch@agh.edu.pl)

### Niezawodność sieci z uszkodzającymi się i odnawianymi połączeniami oraz węzłami

**Słowa kluczowe:** niezawodność sieci, algorytm faktoryzacji, uszkodzające się połączenia, uszkodzające się węzły, naprawialne elementy, metoda  $\pi$ , symulacja

**Streszczenie:** W opracowaniu przedstawiono metodę wyznaczania niezawodności sieci, w których elementy (połączenia i węzły) mogą się uszkodzać i są odnawiane. Przedstawiona metoda wykorzystuje algorytm faktoryzacji, zaproponowaną metodę  $\pi$  oraz symulację komputerową. Na podstawie algorytmu faktoryzacji wyznaczany jest wzór do dokładnego obliczania niezawodności sieci jako prawdopodobieństwa połączenia między wybranym zbiorem  $K$  węzłów ( $R_{N(K)}$ ). Obliczana w ten sposób niezawodność dotyczy przypadków gdy tylko połączenia mogą się uszkodzać i nie są odnawiane. W celu obliczania niezawodności sieci z odnawianymi połączeniami i węzłami wprowadzono quazi uszkodzenia połączeń, które występują na skutek uszkodzeń węzłów do nich przyległych – metoda  $\pi$ . Opracowana metoda pozwala uwzględnić odnawianie wszystkich elementów sieci po uszkodzeniu jak również możliwość wyboru zbioru węzłów ( $N_f$ ), które mogą się niezależnie uszkodzać. Ponadto rozkłady prawdopodobieństwa czasu pracy do uszkodzenia dowolnie określonych zbiorów węzłów i połączeń mogą być różne. Do zaproponowanej metody opracowano symulacyjny model obliczeniowy, który umożliwia wyznaczenie niezawodności sieci ( $R_{N(K)}(t)$ ) z odnawianymi połączeniami i węzłami. Zgodnie z opracowanym modelem wykonano przykładowe obliczenia numeryczne i przedstawiono ich wyniki.

#### 1. Wstęp

Niezawodność sieci jest zagadnieniem rozwiązywanym od wielu lat. Problem ten jest istotny ze względu na rosnące wymagania odnośnie niezawodnego funkcjonowania wszelkiego rodzaju powszechnie występujących sieci, których niezawodność jest rozpatrywana już na etapie projektowania [8,23]. Sieci komputerowe, komunikacyjne, gazowe, wodociągowe, energetyczne i inne są ciągle rozbudowywane i coraz bardziej złożone. Wyznaczanie niezawodności takich sieci jest skomplikowane i w wielu przypadkach jest tzw. problemem NP-trudnym [1,2,20]. Proponowane w literaturze rozwiązania najczęściej dotyczą wyznaczania niezawodności sieci nieskierowanych ze względu na ich spójność i strukturę połączeń [22] lub ze względu

na ich efektywność dystrybucji [6,28]. Podejmowane są również próby uwzględnienia w ocenie niezawodności obydwu tych aspektów [18].

Niezawodność sieci może być obliczana w sposób dokładny [13], poprzez oszacowanie lub wyznaczenie wartości granicznych [5,10]. Odkąd Moskovitz [14] zastosował algorytm faktoryzacji jako dokładną metodę wyznaczenia niezawodności sieci ze względu na jej spójność jest ona bardzo często wykorzystywana i była przedmiotem wielu badań oraz modyfikacji [17,21]. Modelem sieci w algorytmie faktoryzacji jest graf nieskierowany a miarą niezawodności jest prawdopodobieństwo połączenia między wybranym zbiorem węzłów sieci – niezawodność  $K$ -terminali [7,27]. Wyznaczenie niezawodności odbywa się poprzez redukcję grafu reprezentującego sieć przy założeniu że węzły sieci są nieuszkodzalne [3,4]. Wyznaczanie niezawodności sieci z uszkodzającymi się połączeniami oraz węzłami również były rozważane a proponowane sposoby obliczeń przedstawiono w [11,24,25]. Ze względu na znaczną czasochłonność procesu redukcji sieci poszukiwano metod jego szybszego i bardziej efektywnego wykonywania [12]. W tym celu można stosować redukcje: szeregowo-równoległe, wielobok-łańcuch, trójkąt-gwiazda, stopnia-1 i stopnia-2 a także inne metody [9,26]. Uzyskany w efekcie redukcji wzór umożliwia obliczenie określonej miary niezawodności sieci dla wybranej chwili. Znane praktyczne zastosowania algorytmu faktoryzacji w obliczeniach niezawodności dotyczą głównie rozdzielczych sieci wodociągowych i gazowych [15,18] jak również sieci komputerowych [23].

Obliczana w ten sposób niezawodność nie uwzględnia jednak odnawiania uszkodzających się elementów sieci. W rzeczywistych sieciach, ich elementy: rurociągi, łącza telekomunikacyjne, itp., są zawsze odnawiane po uszkodzeniu. Aby więc model do wyznaczania niezawodności sieci był bliższy praktyce odnawianie elementów należy uwzględnić w obliczeniach.

W niniejszym opracowaniu przedstawiono metodę umożliwiającą wyznaczenie niezawodności sieci jako prawdopodobieństwa połączenia między wybranym zbiorem jej węzłów (niezawodność  $K$ -terminali) z uwzględnieniem odnawiania uszkodzających się połączeń oraz węzłów. Uszkodzenia i odnowy węzłów zrealizowano według zaproponowanej metody  $\pi$ . Proponowany model obliczania niezawodności wykorzystuje klasyczny algorytm faktoryzacji, metodę  $\pi$  oraz odpowiednio do nich opracowaną metodę symulacyjną. Obliczanie niezawodności sieci z odnawialnymi elementami składa się z dwóch etapów. W etapie I, który oparty jest na klasycznym algorytmie faktoryzacji, wyznaczany jest wzór do dokładnego obliczenia niezawodności sieci bez odnawiania jej elementów. W etapie II uzyskany wzór oraz metoda  $\pi$  są stosowane w procedurze symulacji, w której wyznaczana jest niezawodność sieci gdy połączenia oraz węzły są odnawiane po uszkodzeniu.

## 2. Oznaczenia i założenia

$G = (V, E)$  – model sieci w postaci grafu nieskierowanego,

$V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  – zbiór wierzchołków grafu, reprezentujących węzły w sieci,  
 $E = (e_1, e_2, \dots, e_m)$  – zbiór krawędzi grafu, reprezentujących połączenia w sieci,  
 $v_j$  – wierzchołek w grafie i węzeł w sieci,  $v_j \in V$ ,  
 $e_i$  – krawędź w grafie i połączenie w sieci,  $e_i \in E$ ,  
 $n$  – liczba węzłów w sieci,  $n = |V|$ ,  
 $N_f$  – zbiór węzłów, które mogą się uszkadzać,  $N_f \subseteq V$ ,  
 $m$  – liczba połączeń w sieci,  $m = |E|$ ,  
 $K$  – zbiór węzłów w sieci, które muszą być połączone aby sieć była w stanie zdatności,  
 $G_K$  – graf z określonym zbiorem węzłów  $K \subseteq V$ ,  
 $x_i(t)$  – stan połączenia  $e_i$  w chwili  $t$  wyrażony w sposób binarny,  $x_i \in \{0, 1\}$ ,  
 $se_i(t)$  – stan połączenia  $e_i$  w chwili  $t$  wyrażony w sposób liczbowy,  $se_i \in \{1, 0, -1, -2\}$ ,  
 $p_i = Pr(x_i = 1)$  – prawdopodobieństwo, że połączenie  $e_i$  jest zdatne,  
 $q_i = 1 - p_i = Pr(x_i = 0)$  – prawdopodobieństwo, że połączenie  $e_i$  jest niezdatne,  
 $R_{N(K)} = R(G_K)$  – niezawodność sieci – prawdopodobieństwo że wszystkie węzły ze zbioru  $K$  są połączone (niezawodność  $K$ -terminali),  
 $AM$  – macierz sąsiedztwa sieci,  
 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$  – zbiór stanów wszystkich połączeń w sieci w chwili  $t$ ,  
 $Se(t) = (se_1(t), se_2(t), \dots, se_m(t))$  – zbiór stanów wszystkich połączeń w sieci w chwili  $t$  wyrażonych w sposób liczbowy,  
 $\Phi(t) = R_{N(K)}(X(t))$  – funkcja określająca w sposób binarny stan sieci w chwili  $t$ ,  
 $\Phi(t) \in \{0, 1\}$ ,  
 $T_h$  – horyzont czasowy symulacji,  
 $t_e$  – chwila wystąpienia zdarzenia,  
 $t_{fij}$  – chwila w której wystąpiło  $j$ -te uszkodzenie połączenia  $e_i$ ,  
 $t_{rij}$  – chwila zakończenia  $j$ -tej odnowy połączenia  $e_i$ ,  
 $t_{sf}$  – chwila w której w symulacji numer  $s$  wystąpił stan niezdatności sieci,  
 $s_{max}$  – liczba powtórzeń symulacji,  
 $s_f(t)$  – liczba symulacji, które do chwili  $t$  zakończyły się wystąpieniem stanu niezdatności sieci,  
 $R_{N(K)}(t)$  – niezawodność sieci z odnawianymi po uszkodzeniu połączeniami i węzłami.

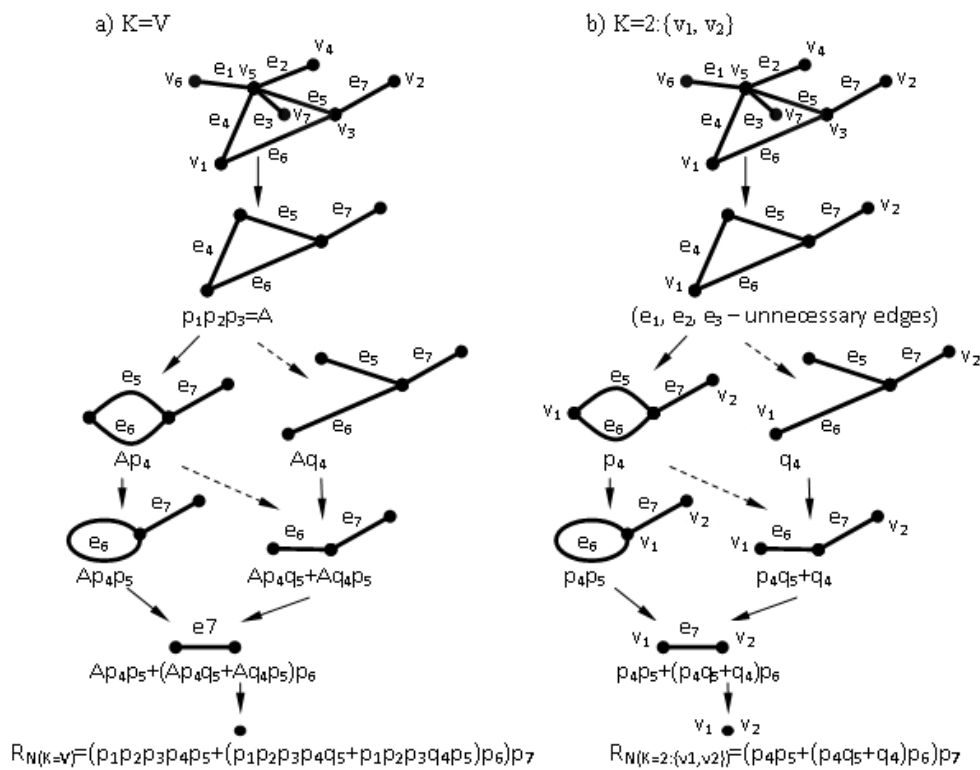
W celu wyznaczenia niezawodności sieci według proponowanej metody przyjęto następujące założenia:

- i) Modelem sieci jest graf nieskierowany,
- ii) Miarą niezawodności sieci jest prawdopodobieństwo, że wszystkie węzły z określonego zbioru  $K$  są połączone – niezawodność  $K$ -terminali sieci,
- iii) Wszystkie połączenia  $e_i$  w sieci ulegają wzajemnie niezależnym uszkodzeniom z prawdopodobieństwem:  $q_i = 1 - p_i$ , które jest znane i znany jest rozkład prawdopodobieństwa czasu pracy do uszkodzenia każdego z nich,
- iv) Do wyznaczenia wzoru do obliczenia niezawodności sieci  $R_{N(K)}$  przyjmuje się, że węzły w sieci nie ulegają uszkodzeniom:  $p_{v_i} = 1$ , a połączenia są nieodnawialne,

- v) Przy wyznaczaniu niezawodności sieci  $R_{N(K)}(t)$  z uszkodzającymi się i odnawianymi elementami wszystkie połączenia oraz węzły mogą się niezależnie uszkodzać i znany jest rozkład prawdopodobieństwa czasu pracy do uszkodzenia każdego z nich,
- vi) Uszkodzenie węzła w sieci powoduje quasi uszkodzenie wszystkich połączeń przyległych do uszkodzonego węzła,
- vii) Każde połączenie  $e_i$  oraz węzeł  $v_j$  sieci może znajdować się tylko w jednym z dwóch stanów: zdatności lub niezdatności,
- viii) Każda odnowa elementu powoduje przywrócenie mu pierwotnych własności niezawodnościowych.

### 3. Niezawodność sieci z nieuszkodzalnymi węzłami i nieodnawialnymi połączeniami

Etap I analizy ma na celu uzyskanie wzoru do dokładnego obliczenia niezawodności sieci z nieuszkodzalnymi węzłami i nienaprawialnymi połączeniami. W tym celu zastosowano algorytm faktoryzacji. Wzór  $R_{N(K)}$  otrzymuje się przez wykonanie redukcji grafu reprezentującego sieć [16,27]. Proces redukcji oparty jest na znanej zasadzie ściągania i wycinania połączeń, którą stosuje się cyklicznie do wszystkich krawędzi grafu reprezentującego sieć. Przykłady wykonania redukcji dla określonych zbiorów  $K$  przedstawiono na rysunku 1 (a:  $|K| = |V|$ , b:  $|K| = 2: \{v_1, v_2\}$ ).



Rys. 1. Przykłady redukcji według algorytmu faktoryzacji

#### 4. Niezawodność sieci z uszkodzającymi się i odnawianymi połączeniami oraz węzłami – metoda $\pi$

W etapie II przedstawiono metodę  $\pi$ , która uwzględnia uszkodzenia oraz odnowy połączeń i węzłów sieci.

Ponieważ zgodnie z założeniem vii każde z połączeń  $e_i$  może znajdować się tylko w jednym z dwóch stanów przyjęto, że stan ten wyrażony będzie w sposób binarny i oznaczony jako  $x_i(t)$ . Na skutek uszkodzeń i odnow połączenia wartości  $x_i(t)$  mogą się zmieniać w czasie w następujący sposób:

$$x_i(t) = \begin{cases} 1 - \text{połączenie } e_i \text{ jest zdatne w chwili } t \\ 0 - \text{połączenie } e_i \text{ jest niezdatne w chwili } t \end{cases} \quad (1)$$

a zbiór stanów wszystkich połączeń w sieci w dowolnej chwili  $t$  będzie zapisany jako:

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \quad (2)$$

We wzorach do obliczania niezawodności sieci ( $R_{N(K)}$ ), uzyskanych według algorytmu faktoryzacji, w miejsce prawdopodobieństw  $p_i$  i  $q_i$  wprowadzimy następujące podstawienie:

$$\begin{cases} p_i = x_i(t) \\ q_i = 1 - x_i(t) \end{cases} \quad (3)$$

Można teraz zauważyć, że po zastosowaniu wzorów (1) – (3), wartość funkcji  $\Phi(t) = R_{N(K)}(X(t))$  w każdym przypadku określa w sposób binarny stan sieci ze względu na połączenie węzłów ze zbioru  $K$ : 1 – zbiór  $K$  węzłów jest połączony, 0 – zbiór  $K$  węzłów nie jest połączony, co zapiszemy w formie:

$$\Phi(t) = R_{N(K)}(X(t)) = \begin{cases} 1 - \text{sieć zdatna w chwili } t \\ 0 - \text{sieć niezdatna w chwili } t \end{cases} \quad (4)$$

W ten sposób można łatwo wyznaczyć stan sieci w dowolnej chwili  $t$  dla każdego możliwego przypadku  $X(t)$  wynikającego z kombinacji stanów  $x_i(t)$  połączeń w sieci.

Ponieważ każde połączenie  $e_i$  łączy dwa węzły, które są na jego końcach (są do tego połączenia przyległe), to dla dowolnej sieci można zapisać macierz sąsiedztwa ( $AM$ ) w postaci:

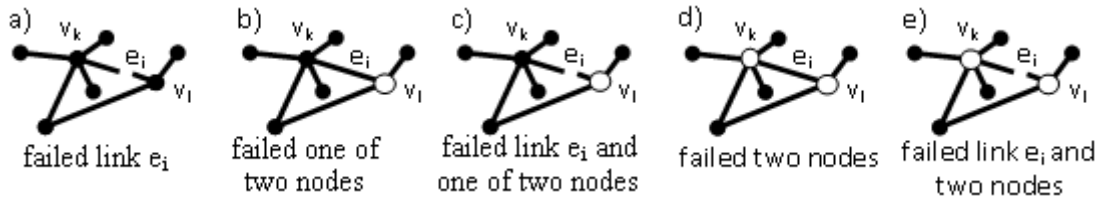
$$AM = \begin{bmatrix} a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,j} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \quad (5)$$

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 - \text{jeśli } v_j \text{ jest jednym z dwóch węzłów przyległych do } e_i \\ 0 - \text{jeśli } v_j \text{ nie jest jednym z dwóch węzłów przyległych do } e_i \end{cases} \quad (6)$$

Zapisana w ten sposób macierz sieci będzie wykorzystywana w procedurze obliczeniowej do szybkiego znajdowania numerów połączeń niezdatnych na skutek uszkodzenia węzłów do nich przyległych.

Analizując struktury połączeń różnych sieci można zauważyć, że uszkodzenie dowolnego węzła przyległego do połączenia  $e_i$  powoduje iż nie może ono być częścią żadnej drogi łączącej zbiór węzłów  $K$  w sieci. Zgodnie z założeniem  $v_i$  taki stan określany jest jako quasi uszkodzenie połączenia.

Jeśli węzły  $v_k$  i  $v_l$  są węzłami przyległymi do połączenia  $e_i$  to możliwe przypadki uszkodzenia i quasi uszkodzeń połączenia przedstawiono na rysunku 2.



Rys. 2. Możliwe przypadki uszkodzeń i quasi uszkodzeń połączenia  $e_i$

Przedstawione na rysunku 2 przypadki powodują:

- rys. 2a: uszkodzenie połączenia  $e_i$ ,
- rys. 2b: quasi uszkodzenie połączenia  $e_i$ ,
- rys. 2c: uszkodzenie i jednocześnie quasi uszkodzenie połączenia  $e_i$ ,
- rys. 2d: podwójne quasi uszkodzenie połączenia  $e_i$ ,
- rys. 2e: uszkodzenie i podwójne quasi uszkodzenie połączenia  $e_i$ .

Każdy rodzaj uszkodzenia połączenia będzie przyjmowany w obliczeniach jako stan jego niezdatności. Aby umożliwić określenie liczby uszkodzeń, które w danej chwili  $t$ , powodują stan niezdatności połączenia wprowadzono wartość liczbowa  $se_i(t)$  opisującą stan połączenia. Jeśli w chwili  $t$  połączenie  $e_i$  jest zdatne to wartość liczbowa  $se_i(t)=1$ . Przyjęto teraz, że na skutek występujących w chwilach  $t_e$  zdarzeń, uszkodzeń i odnow połączenia  $e_i$  oraz węzłów  $v_k$  i  $v_l$ , wartości  $se_i(t)$  połączenia  $e_i$  oraz innych połączeń przyległych do węzłów  $v_k$  i  $v_l$  będą się zmieniać w następujący sposób:

- jeśli połączenie  $e_i$  w chwili  $t_e$  przechodzi w stan niezdatności:
 
$$se_i(t > t_e) = se_i(t_e) - 1 \quad (7)$$

- jeśli węzeł  $v_k$  w chwili  $t_e$  przechodzi w stan niezdatności:
 
$$\forall i (i \in (1, \dots, m) \wedge (AM(a_{i,j=k}) = 1) \Rightarrow se_i(t > t_e) = se_i(t_e) - 1) \quad (8)$$

- jeśli węzeł  $v_l$  w chwili  $t_e$  przechodzi w stan niezdatności:
 
$$\forall i (i \in (1, \dots, m) \wedge (AM(a_{i,j=l}) = 1) \Rightarrow se_i(t > t_e) = se_i(t_e) - 1) \quad (9)$$

- jeśli połączenie  $e_i$  w chwili  $t_e$  przechodzi w stan zdatności:
 
$$se_i(t > t_e) = se_i(t_e) + 1 \quad (10)$$

- jeśli węzeł  $v_k$  w chwili  $t_e$  przechodzi w stan zdatności:
 
$$\forall i (i \in (1, \dots, m) \wedge (AM(a_{i,j=k}) = 1) \Rightarrow se_i(t > t_e) = se_i(t_e) + 1) \quad (11)$$

- jeśli węzeł  $v_l$  w chwili  $t_e$  przechodzi w stan zdatności:

$$\forall i(i \in (1, \dots, m) \wedge (AM(a_{i,j=l}) = 1) \Rightarrow se_i(t > t_e) = se_i(t_e) + 1) \quad (12)$$

stąd ze wzorów (7) – (12) wynika zbiór możliwych wartości  $se_i(t)$  dla każdego połączenia  $e_i$ :

$$se_i(t) = \begin{cases} 1 - \text{połączenie } e_i \text{ i obydwa węzły } v_k, v_l \text{ są w stanie zdatności} \\ 0 - \text{połączenie } e_i \text{ lub węzeł } v_k \text{ lub węzeł } v_l \text{ jest w stanie niezdatności} \\ -1 - \text{połączenie } e_i \text{ i jeden z dwóch węzłów } v_k, v_l \text{ są niezdatne lub} \\ \quad \text{połączenie } e_i \text{ jest zdatne i obydwa węzły } v_k, v_l \text{ są niezdatne} \\ -2 - \text{połączenie } e_i \text{ i obydwa węzły } v_k, v_l \text{ są w stanie niezdatności} \end{cases} \quad (13)$$

Zbiór wartości  $se_i(t)$  dla wszystkich połączeń w sieci w chwili  $t$  zapiszemy w formie:

$$Se(t) = (se_1(t), se_2(t), \dots, se_m(t)) \quad (14)$$

Ponieważ każdy rodzaj uszkodzenia połączenia jest przyjmowany w obliczeniach jako stan jego niezdatności więc stan każdego połączenia  $x_i(t)$  można wyrazić w sposób binarny zapisując teraz wzór (1) w formie:

$$x_i(t) = \begin{cases} 1 - \text{if } se_i(t) = 1; \text{ stan zdatności połączenia } e_i \\ 0 - \text{if } se_i(t) < 1; \text{ stan niezdatności połączenia } e_i \end{cases} \quad (15)$$

Proponowany sposób uwzględnienia uszkodzeń i odnów połączeń oraz węzłów w sieci, wyrażony wzorami (7) – (15), nazwano **metodą  $\pi$**  (3,14) ponieważ:

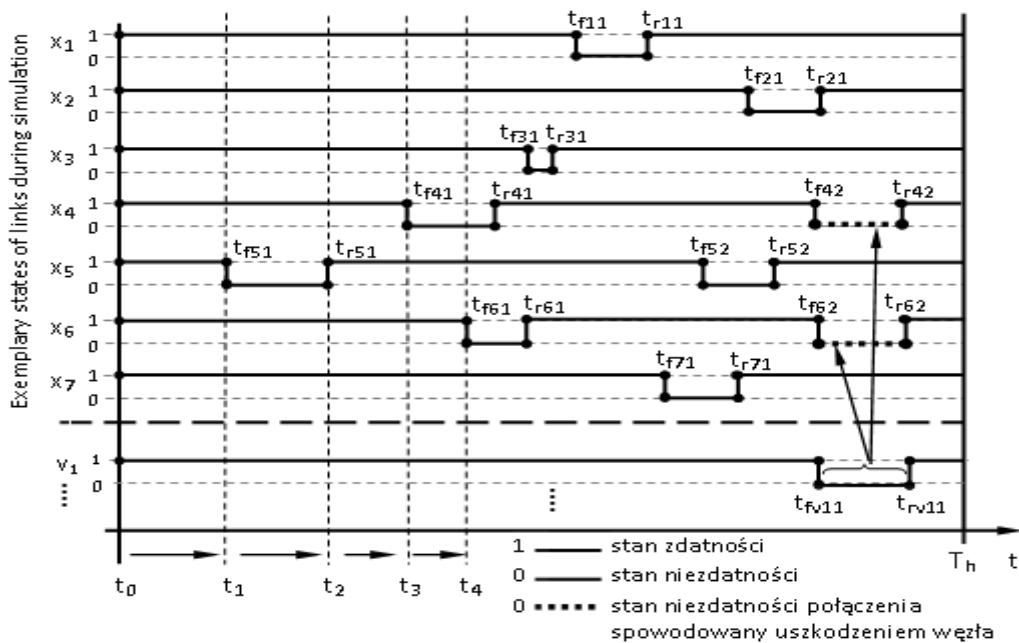
- stan każdego z połączeń zależy od **3** elementów: połączenia oraz dwóch węzłów przyległych do połączenia,
- jest tylko **1** możliwość kiedy połączenie jest w stanie zdatności: połączenie i obydwa węzły przyległe do połączenia są w stanie zdatności,
- stan każdego połączenia jest wyrażany w sposób liczbowy przez **4** wartości:  $se_i(t) \in \{1, 0, -1, -2\}$ .

W ten sposób, za pomocą metody  $\pi$ , określony jest stan połączenia  $e_i$  z uwzględnieniem uszkodzeń samego połączenia oraz uszkodzeń węzłów do niego przyległych.

Na podstawie wzoru (15) otrzymujemy teraz również zbiór stanów  $X(t)$  a ze wzoru (4) możemy obliczyć wartość funkcji  $\Phi(t)$ . Czyli możliwe jest określenie stanu całej sieci, ze względu na połączenie węzłów ze zbioru  $K$ , przy uszkadzających się i odnawianych połączeniach oraz węzłach.

## 5. Implementacja metody $\pi$ – model symulacyjny wyznaczania niezawodności sieci

Opracowana symulacyjna metoda obliczeniowa realizowana jest według schematu, który dla sieci z rysunku 1a przedstawiono przykładowo na rysunku 3. Dla każdego połączenia  $e_i$  oraz węzła  $v_j$  losowane są niezależnie (zastosowano metodę odwracania dystrybuanty) występujące kolejno po sobie wartości czasów pracy do uszkodzenia oraz czasów trwania jego odnowy [19]. Są one do siebie dodawane tworząc w ten sposób kolejne wartości czasów:  $t_{fij}$  oraz  $t_{rij}$ . Proces ten trwa do osiągnięcia wartości horyzontu czasowego symulacji ( $T_h$ ) lub pojawienia się stanu, w którym sieć jest niezdatna ( $\Phi(t)=0$ ). Uszkodzenia węzłów uwzględniane są poprzez quasi uszkodzenia połączeń według metody  $\pi$ .



Rys. 3. Przykładowe stany  $x_i(t)$  połączeń sieci z rys. 1a) występujące w symulacji

Sposób analizy wyników w trakcie symulacji z wykorzystaniem: wzoru  $R_{N(K)}$ , macierzy  $AM$  oraz metody  $\pi$  zamieszczono w tabeli 1.

Tab. 1. Sposób analizy wyników w trakcie symulacji dla stanów połączeń z rys. 3

| Nr | $t$   | $X(t)$                     | $R_{N(K=V)}$  | $\Phi(t) = R_{N(K=V)}(X(t))$          |
|----|-------|----------------------------|---|---------------------------------------|
| 1  | $t_0$ | $X(t_0) = (1,1,1,1,1,1,1)$ | $(p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 + [p_1 p_2 p_3 p_4 q_5 + p_1 p_2 p_3 q_4 p_5] p_6) p_7$<br>po zastosowaniu (6):<br>$(x_1(t)x_2(t)x_3(t)x_4(t)x_5(t) + [x_1(t)x_2(t)x_3(t)x_4(t)(1-x_5(t)) + x_1(t)x_2(t)x_3(t)(1-x_4(t))x_5(t)]x_6(t))x_7(t)$ | 1 – stan zdatności                    |
| 2  | $t_1$ | $X(t_1) = (1,1,1,1,0,1,1)$ |   | 1 – stan zdatności                    |
| 3  | $t_2$ | $X(t_2) = (1,1,1,1,1,1,1)$ |   | 1 – stan zdatności                    |
| 4  | $t_3$ | $X(t_3) = (1,1,1,0,1,1,1)$ |   | 1 – stan zdatności                    |
| 5  | $t_4$ | $X(t_4) = (1,1,1,0,1,0,1)$ |   | 0 – stan niezdatności: $t_4 = t_{sf}$ |



Przedstawiony sposób losowania czasów zdarzeń: uszkodzenia i zakończenia odnowy połączeń i węzłów oraz ich analizy wykonywany jest w każdej symulacji, która jest powtarzana przyjętą liczbę razy ( $s_{max}$ ). Na podstawie zgromadzonych wartości czasów  $t_{sf}$  z wszystkich symulacji wyznaczana jest niezawodność sieci z odnawianymi po uszkodzeniu połączeniami oraz węzłami, według wzoru:

$$R_{N(K)}(t) = 1 - \frac{s_f(t)}{s_{max}} \quad (16)$$

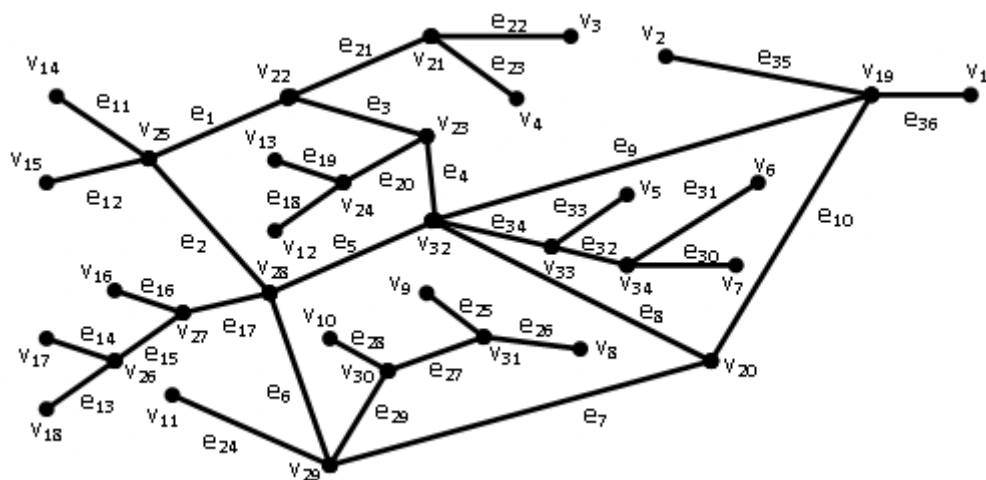
Procedurę symulacji zapisano w formie programu komputerowego przy użyciu pakietu Matlab. W programie zapewniono możliwość obliczania różnych miar niezawodności sieci dla przypadków:

- bez uszkodzeń węzłów ( $N_f = \emptyset$ ),
- z uszkodzeniami i odnowami wszystkich węzłów sieci ( $N_f = V$ ),
- z uszkodzeniami i odnowami wybranego zbioru węzłów ( $|N_f| < |V|$ ).

Ponadto dowolne podzbiory uszkadzających się połączeń i węzłów mogą mieć różne rozkłady prawdopodobieństwa czasu pracy do uszkodzenia i różne wartości intensywności odnowy.

## 6. Przykład i wyniki zastosowania opracowanej metody

Opracowana metoda została zastosowana do obliczenia niezawodności sieci przedstawionej na rysunku 4. Model tej sieci w postaci grafu nieskierowanego składa się z 36 połączeń i 34 węzłów.



Rys. 4. Struktura połączeń analizowanej sieci

Dla analizowanej sieci, według metody przedstawionej w etapie I, wykonano redukcje i uzyskano wzory do obliczania trzech różnych miar niezawodności:  $R_{N(K=V)}$ ,  $R_{N(K=2:\{v1, v14\})}$ ,  $R_{N(K=18:\{v1 - v18\})}$ . Ze względu na obszerność nie zostały zamieszczone. Wzory zostały wykorzystane w wykonanych obliczeniach. Rozkłady

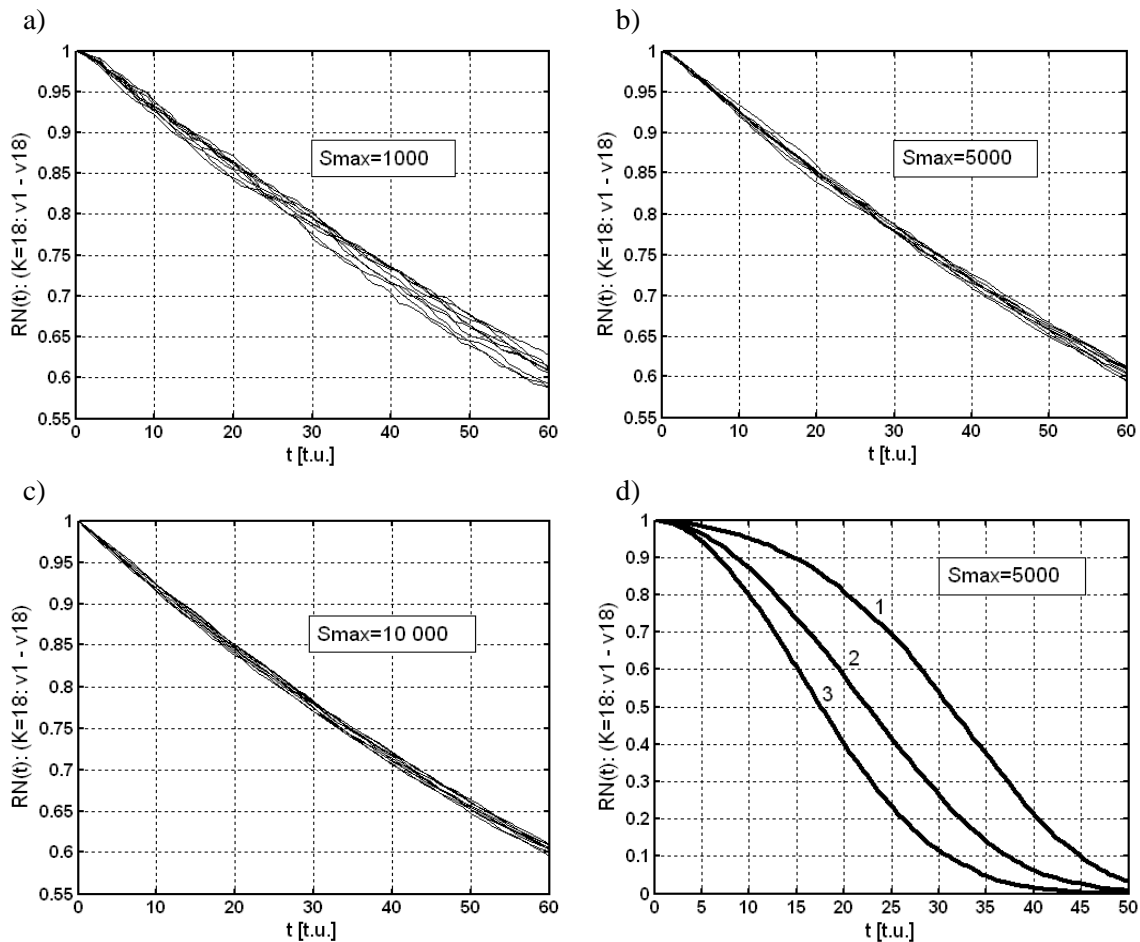
prawdopodobieństwa czasu pracy do uszkodzenia oraz odnowy połączeń i węzłów wraz z parametrami wykorzystanymi w symulacjach zamieszczono w tabeli 2. We wszystkich przypadkach dla węzłów  $v_j \in N_f$  i połączeń  $e_i$  przyjęto wykładniczy rozkład prawdopodobieństwa odnowy:  $\mu=10$  [1/t.u.], (t.u. – time unit (jednostka czasu)).

Tab. 2. Rozkłady prawdopodobieństwa i parametry wykorzystane w symulacjach

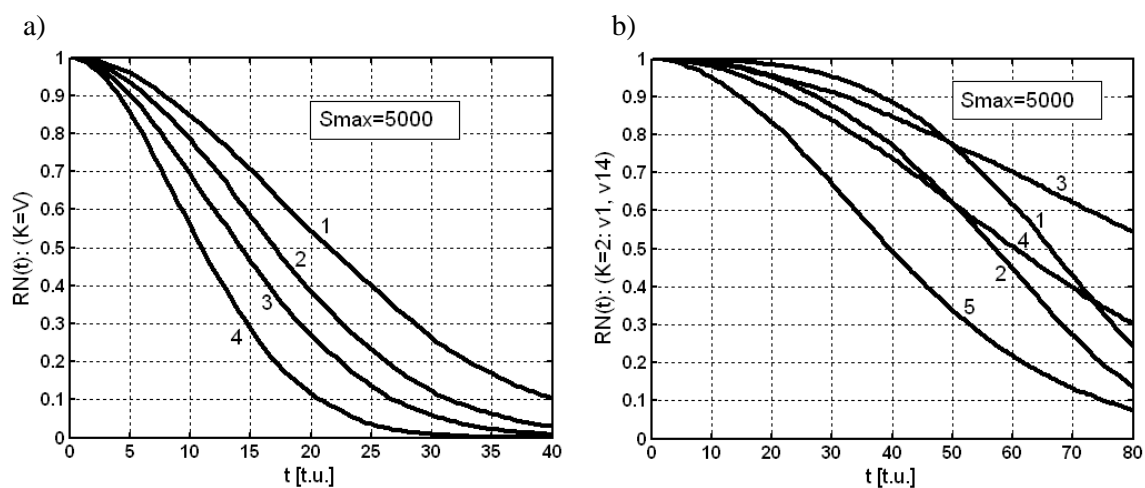
| Miara niezawodności sieci              | Zbiór węzłów które mogą się uszkadzać: $N_f$                                     | Rozkład prawdop. uszkodzeń dla węzłów $v_j \in N_f$ | Rozkład prawdop. uszkodzeń dla połączeń $e_i \in E$   |
|--|--|---|---|
| <b>I:</b><br>$R_{N(K=18:\{v1-v18\})}$  | 1) $N_f = \emptyset$ :<br>bez uszkodzeń węzłów                                   | –   | Wykładniczy:<br>$\lambda=3 \cdot 10^{-4}$ [1/t.u.]  |
| <b>II:</b><br>$R_{N(K=18:\{v1-v18\})}$ | 1) $N_f = \emptyset$   | –   | Normalny:<br>$m=80$ [t.u.]; $\sigma=25$ [t.u.]  |
|  | 2) $N_f = 16: \{v_{19}, \dots, v_{34}\}$   | Weibulla:<br>$\alpha=1,9; \beta=150$ [t.u.]         |   |
|  | 3) $N_f = 16: \{v_{19}, \dots, v_{34}\}$   | Weibulla:<br>$\alpha=1,9; \beta=100$ [t.u.]         |   |
| <b>III:</b><br>$R_{N(K=v)}$            | 1) $N_f = \emptyset$   | –   | Weibulla:<br>$\alpha=1,9; \beta=150$ [t.u.]   |
|  | 2) $N_f = 16: \{v_{19}, \dots, v_{34}\}$   | Weibulla:<br>$\alpha=1,9; \beta=150$ [t.u.]         |   |
|  | 3) $N_f = V: \{v_1, \dots, v_{34}\}$   | Weibulla:<br>$\alpha=1,9; \beta=150$ [t.u.]         |   |
|  | 4) $N_f = V: \{v_1, \dots, v_{34}\}$   | Weibulla:<br>$\alpha=1,9; \beta=100$ [t.u.]         |   |
| <b>IV:</b><br>$R_{N(K=2:\{v1, v14\})}$ | 1) $N_f = \emptyset$   | –   | Normalny:<br>$m=80$ [t.u.]; $\sigma=25$ [t.u.]  |
|  | 2) $N_f = 8: \{v_{19}, v_{20}, v_{22}, v_{23}, v_{25}, v_{28}, v_{29}, v_{32}\}$ | Weibulla:<br>$\alpha=1,9; \beta=150$ [t.u.]         |   |
|  | 3) $N_f = \emptyset$   | –   | Weibulla:<br>$\alpha=1,9; \beta=150$ [t.u.]   |
|  | 4) $N_f = 8: \{v_{19}, v_{20}, v_{22}, v_{23}, v_{25}, v_{28}, v_{29}, v_{32}\}$ | Weibulla:<br>$\alpha=1,9; \beta=150$ [t.u.]         |   |
|  | 5) $N_f = 8: \{v_{19}, v_{20}, v_{22}, v_{23}, v_{25}, v_{28}, v_{29}, v_{32}\}$ | Weibulla:<br>$\alpha=1,9; \beta=100$ [t.u.]         |   |
|  |  |   | połączenia $e_{11}, e_{36}$ –<br>Weibulla:<br>$\alpha=1,9; \beta=100$ [t.u.],<br>reszta poł. – Normalny:<br>$m=80$ [t.u.]; $\sigma=25$ [t.u.] |

Uzyskane wyniki obliczeń dla wszystkich przypadków z tabeli 2 przedstawiono na rysunkach 5 i 6. Na rysunku 5a, 5b i 5c przedstawiono rozrzut wyników z 10 symulacji uzyskanych w zależności od przyjętej liczby powtórzeń ( $s_{max}$ ) pojedynczej symulacji. Można zauważyć, że wzrost liczby powtórzeń  $s_{max}$  z wartości 1000 do 5000 skutkuje znaczną poprawą zbieżności wyników, natomiast zwiększenie  $s_{max}$  do 10000 nie daje już znaczącej poprawy. Średni czas trwania obliczeń wzrósł z 0,9 [s] do 2,6 [s] a dla  $s_{max}=10000$  do 4,9 [s]. Obliczenia wykonano przy wykorzystaniu standardowego komputera PC z procesorem 1,5 [GHz] i 2 [GB] RAM. Rysunek 5d przedstawia niezawodność analizowanej sieci  $R_{N(K=18:\{v1-v18\})}(t)$  gdy węzły w sieci nie ulegają

uszkodzeniom oraz gdy określony zbiór węzłów  $N_f$  ulega uszkodzeniom – przypadek II w tabeli 2.



Rys. 5. Rozrzut wyników w zależności od liczby powtórzeń symulacji: a, b, c – przypadek I według tabeli 2 oraz niezawodność sieci: d – przypadek II według tabeli 2



Rys. 6. Niezawodność sieci: a – przypadek III, b – przypadek IV, według tabeli 2

Na rysunku 6a przedstawiono niezawodność sieci  $R_{N(K=V)}(t)$  uzyskaną dla przypadku III według tabeli 2. Na rysunku 6b przedstawiono kolejną miarę niezawodności sieci

$R_{N(K=2:\{v1,v14\})}(t)$  uzyskaną również dla różnych zbiorów uszkodzających się węzłów w sieci i różnych rozkładów prawdopodobieństwa czasu pracy do uszkodzenia. We wszystkich przypadkach uwzględnienie uszkodzania się określonego zbioru lub wszystkich węzłów powoduje obniżenie niezawodności sieci w porównaniu do sytuacji z nieuszkodzalnymi węzłami. Dla przypadków II, III i IV w tabeli 2, gdy połączenia i węzły ulegały uszkodzeniom, czas wykonywania obliczeń przy wartości  $s_{max}=5000$  mieścił się w przedziale 5 – 20 [s].

## 7. Podsumowanie i dyskusja krytyczna

Opracowana metoda obliczeniowa pozwala na wyznaczanie różnych miar niezawodności sieci z odnawianymi po uszkodzeniu elementami. Może być wykorzystana przy obliczaniu niezawodności strukturalnej rozdzielczych sieci gazowych czy wodociągowych jak również sieci logistycznych i różnych typów sieci telekomunikacyjnych. Szczególnie użyteczna może być w przypadku sieci komputerowych gdzie węzły i połączenia są zupełnie odmiennymi elementami a mają istotny wpływ na niezawodność funkcjonowania całej sieci. Opracowany model może być również zastosowany do obliczania niezawodności innych złożonych układów technicznych o określonych (znanych) strukturach niezawodnościowych, w których elementy są odnawialne.

Zaproponowana metoda  $\pi$  umożliwia uwzględnienie uszkodzania się zarówno połączeń jak i węzłów w sieci, poprzez wprowadzenie quasi uszkodzeń połączeń. Wzory uzyskane według algorytmu faktoryzacji uwzględniające tylko uszkodzanie się połączeń, po zastosowaniu metody  $\pi$ , pozwalają łatwo określać stan całej sieci gdy uszkodzają się zarówno połączenia jak i węzły. W opracowanym modelu symulacyjnym istnieje możliwość stosowania różnych rozkładów prawdopodobieństwa czasu pracy do uszkodzenia dla dowolnych podzbiorów połączeń oraz podzbiorów uszkodzających się węzłów. Uszkodzające się elementy mogą mieć również różne wartości intensywności odnowy.

Na podstawie wyników obliczeń można zauważyć, że nieuwzględnianie uszkodzeń węzłów ( $N_f \neq \emptyset$ ) prowadzi do przeszacowania niezawodności sieci. Uwzględnienie uszkodzania się i odnowy połączeń oraz węzłów powoduje, że proponowany model lepiej pasuje do przypadków uszkodzeń występujących w rzeczywistych sieciach. Przedstawiony model może być więc bardziej użyteczny w analizie praktycznych przypadków dając bardziej wiarygodną ocenę niezawodności sieci.

Niedogodnością opracowanej metody jest konieczność korzystania ze wzorów uzyskanych według algorytmu faktoryzacji, których otrzymanie w przypadku bardzo złożonych sieci jest dość pracochłonne. Dalsze prace mogą zmierzać do poszukiwania bardziej efektywnych metod redukcji sieci i otrzymywania wzorów dla poszukiwanych miar niezawodności sieci  $R_{N(K)}$ , np.: poprzez opracowanie algorytmów komputerowych, lub modyfikację metody i wyznaczanie niezawodności sieci bez konieczności ich

stosowania. Ponadto interesującym kierunkiem dalszych badań może być modyfikacja metody do zastosowań dla sieci skierowanych.

## **Bibliografia**

1. Ball M O. Complexity of network reliability computations. *Networks* 1980; 10: 153–165.
2. Ball M O. Computational complexity of network reliability analysis: An overview. *IEEE Transactions on Reliability* 1986; 35 (3): 230–239.
3. Beichelt F, Tittmann P. A generalized reduction method for the connectedness probability of stochastic networks. *IEEE Transactions on Reliability* 1991; 40 (2): 198–204.
4. Carlier J, Lucet C. A decomposition algorithm for network reliability evaluation. *Discrete Applied Mathematics* 1996; 65: 141–156.
5. Gnedenko B, Ushakov I. Probabilistic reliability engineering, Falk J Ed., Wiley, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore 1995: 340–377.
6. Gu C, Wu J, Li F. Reliability-based distribution network pricing. *IEEE Transactions on Power Systems* 2012; 27 (3): 1646–1655.
7. Hardy G, Lucet C, Limnios N. K-Terminal network reliability measures with binary decision diagrams. *IEEE Transactions on Reliability* 2007; 56 (3): 506–515.
8. Jan R-H. Design of reliable networks. *Computers & Operations Research* 1993; 20: 25–34.
9. Koide T, Shinmori S, Ishii H. Topological optimization with a network reliability constraint. *Discrete Applied Mathematics* 2001; 115: 135–149.
10. Krivoulets V G, Polesskii V P. Quasipacking bounds for network reliability. *Information Processes* 2001; 1 (2): 126–146.
11. Lin M S, Chen D J, Horng M S. The reliability analysis of distributed computing systems with imperfect nodes. *The Computer Journal* 1999; 42 (2): 129–141.
12. Liu W Li J. An improved recursive decomposition algorithm for reliability evaluation of lifeline networks. *Earthquake Engineering & Engineering Vibration* 2009; 8: 409–419.
13. Lucet C, Manouvrier J-F. Exact methods to compute network reliability, in *Statistical and Probabilistic Models in Reliability*, Ionescu D C and Limnios N, Eds. Birkhauser, Boston 1999: 279–294.
14. Moskowitz F. The analysis of redundancy networks. *AIEE Trans. (Commun. Electron.)* 1958; 39: 627–632.
15. Natvig B, Morch H. An application of multistate reliability theory to an offshore gas pipeline network. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering* 2003; 10 (4): 361–381.
16. Page L B, Perry J E. A practical implementation of the factoring theorem for network reliability. *IEEE Transactions on Reliability* 1988; 37: 259-267.

17. Pilch R, Szybka J, Broniec Z. Determining of hot water-pipe exploitation time on the basis of limiting states. *Eksploracja i Niezawodność - Maintenance and Reliability* 2012; 14 (3): 203-207.
18. Pilch R, Szybka J, Tuszynska A. Application of factoring and time-space simulation methods for assessment of the reliability of water-pipe networks. *Eksploracja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* 2014; 16 (2): 253–258.
19. Pilch R. A method for obtaining the required system reliability level by applying preventive maintenance. *Simulation: Transactions of the Society for Modeling and Simulation International* 2015; 91 (7): 615–624.
20. Provan J S. The complexity of reliability computations on planar and acyclic graphs. *SIAM Journal on Computing* 1986; 15 (3): 694–702.
21. Ramirez-Marquez J E, Rocco C M. All-terminal network reliability optimization via probabilistic solution discovery. *Reliability Engineering and System Safety* 2008; 93: 1689–1697.
22. Resende L. Implementation of a factoring algorithm for reliability evaluation of undirected networks. *IEEE Transactions on Reliability* 1988; 37 (5): 462–468.
23. Soi I M, Aggarwal K K. Reliability indices for topological design of computer communication networks, *IEEE Transactions on Reliability* 1981; 30: 438–443.
24. Theologou O R, Carlier J G. Factoring and reductions for networks with imperfect vertices. *IEEE Transactions on Reliability* 1991; 40: 210–217.
25. Torrieri D. Calculation of node-pair reliability in large networks with unreliable nodes, *IEEE Transactions on Reliability* 1994; 43: 375–382.
26. Wood R K. A factoring algorithm using polygon-to-chain reductions for computing K-terminal network reliability. *Networks* 1985; 15: 173–190.
27. Wood R K. Factoring algorithms for computing K-terminal network reliability. *IEEE Transactions on Reliability* 1986; 35 (3): 269–278.
28. Yannopoulos S, Spiliotis M. Water distribution system reliability based on minimum cut – set approach and the hydraulic availability. *Water Resources Management* 2013; 27: 1821–1836.