

**dr Maciej Romaniuk**

Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk,  
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa, Polska

i

Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II  
ul. Konstantynów 1 H, 20-708 Lublin, Polska

e-mail: [mroman@ibspan.waw.pl](mailto:mroman@ibspan.waw.pl)

## **Optymalizacja kosztów eksploatacyjnych rurociągu dla V-kształtnej funkcji intensywności uszkodzeń**

## **Optimization of maintenance costs of a pipeline for a V-shaped hazard rate of malfunction intensities**

**Słowa kluczowe:** *system dystrybucji wody, koszty eksploatacji, wypukła funkcja intensywności uszkodzeń, wartość obecna pieniądza, metoda Kiefera-Wolfowitza, model jednoczynnikowy Vasicka*

**Keywords:** *water distribution system, maintenance costs, convex hazard rate function, Monte Carlo simulations, present value of money, Kiefer-Wolfowitz method, one-factor Vasicek model*

**Abstrakt:** W niniejszej publikacji skupiam się na obliczeniu kosztów eksploatacji wodociągu (water distribution system – WDS), jeśli pod uwagę zostanie wzięta wartość pieniądza w czasie. W przeciwieństwie do klasycznego podejścia, zamiast stałej wartości stopy procentowej, zakładam stochastyczny proces stopy procentowej (w postaci jednoczynnikowego modelu Vasicka). Założenie to przedstawia niepewne, przyszłe zachowanie stopy procentowej w bardziej dokładny i realistyczny sposób. Momenty awarii połączeń w WDS generowane są z wykorzystaniem metody Monte Carlo poprzez zastosowanie nowego typu funkcji intensywności uszkodzeń (hazard rate function – HRF), który zaproponowany został w niniejszej publikacji. Ponadto, jakość połączenia oraz ilość wcześniejszych uszkodzeń ma bezpośredni wpływ na statystyczne właściwości wprowadzonej HRF. Oprócz analizy wygenerowanych za pomocą symulacji wyników (takich jak koszty eksploatacji), użyta została metoda Kiefera-Wolfowitza w celu lepszego dopasowania jednego z parametrów WDS – deterministycznego i bezwarunkowego momentu wymiany każdego z połączeń (czyli wymiany planowanej). Zaprezentowane zostały również

algorytmy zarówno dla symulowania momentów uszkodzeń przy użyciu zaproponowanej HRF, jak i dla kroku optymalizacyjnego. Ponadto, wykonana została analiza statystyczna kilku przykładów WDS dla dokładnych („crisp”) i rozmytych („fuzzy”) wartości parametrów.

**Abstract:** In this paper I focus on an evaluation of maintenance costs of a water distribution system (WDS), if a concept of a value of money in time is taken into account. Contrary to more classical approaches, instead of a constant yield, a strictly stochastic process (i.e., the one-factor Vasicek model) of an interest rate is assumed. Such an assumption presents uncertain, future behaviour of the yield in a more correct, realistic way. Moments of failures of connections in a WDS are generated using the Monte Carlo simulations via a new kind of a convex hazard rate function (HRF), which is proposed in this paper. Moreover, quality of a pipeline and a number of previous failures have direct influence on statistical properties of this introduced HRF. Apart from an analysis of the simulated output (like the maintenance costs), the Kiefer-Wolfowitz method is used for a better adjustment of one of parameters of a WDS – deterministic and unconditional replacement (i.e., planned replacement) time of each pipe. Algorithms, for both the simulations of the failure moments for the introduced HRF and the optimization step, are also provided. Additionally, some examples of a WDS for a crisp and a fuzzified settings are statistically analysed.

## 1. Wprowadzenie

Z punktu widzenia konsumenta, głównym celem systemu dystrybucji wody (który jest dalej określany skrótem WDS) jest dostarczanie wody, co więcej – wody o odpowiedniej jakości i w wystarczającej ilości. Dlatego też należy przeprowadzić rozmaite czynności serwisowe, np. uszkodzona lub po prostu nie działająca rura lub inna część WDS powinna zostać naprawiona lub wymieniona. Ponieważ woda jest niezbędnym dla ludzi dobrem, dlatego też literatura naukowa poświęcona niezawodności systemów dystrybucji wody jest bardzo obfita. Po pierwsze, wymieńmy przeglądy rozmaitych metod, podejść i samej literatury, które znaleźć można np. w [15,28,29]. Same publikacje są również bardzo zróżnicowane – niektóre dotyczą hydraulicznych lub fizycznych charakterystyk elementów WDS (patrz np. [4,17]), w innych dyskutowane jest raczej „makrozarządzanie” problemem odnowienia WDS (patrz np. [12,22]) lub jedynie tylko „mikrozarządzanie” (np. pojedynczym budynkiem, patrz [1]). Proponowane są również nawet systemy monitorujące dla wykrywania uszkodzeń w WDS (patrz np. [23]).

Zazwyczaj, jeśli rozważane są koszty eksploatacji WDS, należy wziąć pod uwagę planowanie w relatywnie długim horyzoncie czasowym. Przedział taki obejmuje 20, 50 lub nawet 60 lat (patrz np. [12]). Oczywiście, jedna jednostka pieniądza, jaką płacimy teraz i ta sama jednostka płatna za 50-60 lat nie są sobie równe. W związku z tym należy wziąć pod uwagę wpływ wartości przyszłej / obecnej pieniądza na obliczenia kosztów eksploatacji. Jednak większość autorów stosuje jedynie stałą stopę procentową jako czynnik dyskontujący w celu obliczenia wartości obecnej przyszłych strumieni pieniężnych. Takie założenie jest oczywiście zbyt mocne i nierealistyczne w praktycznych sytuacjach. W związku z tym, w tym artykule przyjmuję bardziej realistyczny i skomplikowany model – zmienną stopę procentową, która jest opisana za pomocą szeroko znanego jednoczynnikowego modelu Vasicka.

Ponadto należy przyjąć pewne modele dla intensywności uszkodzeń elementów WDS. Jak jest to proponowane w literaturze, może to zależeć od wybranych fizycznych cech rury oraz równań numerycznych (jak równanie Hazena-Williamsa, patrz np. [12]), może być to opisane za pomocą pewnego typu procesu Markowa lub semi-Markowa (patrz np. [13,16,26]) lub uszkodzenia mogą być losowo generowane z wykorzystaniem funkcji intensywności uszkodzeń (hazard rate function – HRF). Wszechstronny przegląd różnych HRF można znaleźć w [29]. W artykule tym proponuję nowy rodzaj HRF, która może być łatwo dostosowana do rzeczywistych danych i która jest bardzo efektywna w symulacjach Monte Carlo.

Bardzo często w literaturze proponowana jest pewna procedura optymalizacyjna minimalizująca koszty eksploatacji dla WDS. Przykładowo, całkowite koszty odnowienia, ryzyka i niedostępności WDS są dane jako jedna funkcja czasu, a potem minimalizowane (patrz np. [24]), brane są pod uwagę różne scenariusze z wymianą rur lub bez dla kosztów instalacji i reperowania wraz ze specjalnym modyfikatorem uszkodzeń i niedogodności (patrz np. [18]) itd. W dalszej części również zaproponuję podejście optymalizacyjne. W trakcie tej procedury algorytm Kiefera-Wolfowitza zostanie wykorzystany w celu znalezienia minimum kosztów eksploatacji, w przypadku, gdy bezwarunkowy czas wymiany rury jest naszą zmienną.

Również należy przyjąć pewien model dla wcześniej wspomnianych kosztów eksploatacji. W literaturze koszty te związane są z różnymi źródłami i modelami, jak odnowienie rury i koszty naprawy uszkodzenia (patrz np. [12]), dodatkowa energia, straty wody i utrata przychodów (patrz np. [11]) itd. W niniejszym artykule koszty modelowane są przez użycie ich stałych i zmiennych części. Ten drugi element związany jest z czasem, który niezbędny jest do przeprowadzenia naprawy lub wymiany uszkodzonej rury. Niemniej w niektórych publikacjach idea ta (tzn. czas wykonania czynności) jest zupełnie pomijana. Uproszczenie takie jest możliwe (patrz dokładniejszą dyskusję np. w [29]), ale zazwyczaj odpowiedni przedział czasu modelowany jest za pomocą pewnej zmiennej losowej (np. z rozkładu wykładniczego, patrz np. [11]). W dalszej części zakładać również będę, że czas niezbędny do wykonania naprawy lub wymiany będzie opisany pewnym rozkładem prawdopodobieństwa.

Niniejszą publikację można traktować jako dalsze rozwinięcie pewnych pomysłów, które były wcześniej dyskutowane w [25,26], ale również jako propozycję całkowicie nowych. W związku z tym mój obecny wkład dotyczy czterech zagadnień.

Po pierwsze, proponuję nowy rodzaj funkcji intensywności uszkodzeń (HRF) dla rur w WDS. Bardzo wiele HRF było omawianych w literaturze, niemniej każda z nich ma pewne istotne wady (patrz np. wszechstronny przegląd w [29]). HRF, która jest wprowadzona w tym artykule, ma pewne przydatne cechy. Jest ona V-kształtna, co modeluje dwa odmienne stany połączeń: okres burn-in (bezpośrednio po naprawie lub instalacji rury) i późniejszy okres wear-out (gdy intensywność uszkodzeń jest większa niż w trakcie fazy początkowej). Ta HRF zależy również od ilości wcześniejszych napraw danego rurociągu, co oznacza, że postępujące zmęczenie materiału, wynikające z powracających stresów napraw, może zostać wzięte pod uwagę. Ponadto odpowiedni algorytm dla losowego generowania przedziałów czasów pomiędzy uszkodzeniami jest numerycznie bardzo efektywny i bezpośrednio stosowalny. Zatem symulacje Monte Carlo, bazujące na tej HRF, mogą być bezpośrednio zastosowane do generowania zachowania całego WDS. Co więcej, parametry tej HRF mogą zostać łatwo rozmyte, co umożliwia nam wprowadzenie dodatkowego źródła niepewności i niepewności, innego niż całkowicie probabilistyczne. Cechy te warte są podkreślenia, jako bardzo istotne w przypadku porównania wprowadzonej HRF z innymi funkcjami tego typu.

Po drugie, zaadaptowałem algorytm Kiefiera-Wolfowitza do znalezienia minimum całkowitych kosztów eksploatacji. Metoda ta pozwoliła mi na podjęcie decyzji dotyczącej optymalnej wartości deterministycznego i bezwarunkowego czasu wymiany, tzn. gdy lepiej jest wymienić połączenie zamiast dokonywania jego kolejnej, przyszłej naprawy. W związku z tym, że wspomniany algorytm bezpośrednio wykorzystuje stochastyczną naturę symulacji, metoda Monte Carlo może zostać bezpośrednio użyta do obliczenia niezbędnych estymatorów przy tym podejściu. W artykule tym skupiam się na bezwarunkowym czasie wymiany jako na zmiennej, która jest rozważana w problemie optymalizacyjnym, ale prezentowane podejście może zostać rozszerzone do innych parametrów, które są istotne dla osób podejmujących decyzje. Ponieważ wyniki, które symulowane są podczas analizy, zachowują się w bardzo zmienny i nieprzewidywalny sposób, zaproponowałem pewną praktyczną zmianę w standardowym algorytmie Kiefiera-Wolfowitza. Jak wskazane zostało w prezentowanych przykładach numerycznych, ta procedura optymalizacyjna może w istotny sposób zmniejszyć koszty eksploatacji.

Po trzecie, poza przypadkiem dokładnym (crisp), omówiłem możliwe rozmycie parametrów wprowadzonej HRF i modelu kosztów. Jak wiadomo (patrz np. [3,6]), w praktycznych sytuacjach dane mogą być nieprecyzyjne i niepewne. Ponadto, czasami nie mogą zostać prawidłowo zamodelowane, jeśli zostanie użyte tylko podejście probabilistyczne. W związku z tym, rozwinąłem dalej pomysł, omówiony w [26], i niektóre parametry przyjętych modeli opisane są za pomocą liczb rozmytych. Oznacza to, że nie są one kompletnie dokładne (tzn. „crisp”), ale są w pewien sposób nieprecyzyjne („blisko / około”) i mogą zostać podane jako opinie ekspertów (nawet w formie zmiennych lingwistycznych). Przykładowo, koszt naprawy jest opisany raczej jako „około 50 tysięcy (jakieś jednostki pieniężnej)”, a nie wartość dokładna i w pełni podana zanim ta naprawa będzie mieć miejsce. Podejście rozmyte jest szeroko wykorzystywane w analizie możliwych decyzji finansowych (patrz np. [20,21]).

Po czwarte, w przeciwieństwie do [25,26], zaproponowałem teraz bardziej skomplikowany model odcinków czasów przejść pomiędzy stanami rurociągu. Przedziały między uszkodzeniami generowane są z pomocą wprowadzonej HRF, a czasy napraw i wymian losowane są z różnych rozkładów prawdopodobieństwa. Dla ułatwienia analizy, skupiłem się na rozkładzie wykładniczym, ale inne gęstości mogą zostać łatwo zastosowane w proponowanym podejściu symulacyjnym. Ponadto ten model stanów jest bezpośrednio związany z modelem kosztów obsługi eksploatacyjnej. Rozróżniam dwa typy takich kosztów (oddzielnie dla naprawy i wymiany) o dwóch elementach dla każdego z nich – części stałej (która jest niezależna od długości czasu czynności serwisowej) i części zmiennej (która zależy od losowej wartości czasu naprawy lub wymiany). Dzięki temu rozważany model jest bliski sytuacjom praktycznym.

Należy podkreślić, że stochastyczny model stopy procentowej (tzn. model jednoczynnikowy Vasicka, który jest przyjęty w tym artykule) jest bezpośrednio wbudowany w procedurę symulacji Monte Carlo, podobnie jak w [26]. Według najlepszej wiedzy autora, podejście takie jest nadal nowym pomysłem, który nie jest nawet rozważany w innych publikacjach. Tymczasem istnieją zasadnicze różnice w estymowanych wartościach kosztów i innych ważnych rezultatach dla modeli stałej stopy i zmiennego czynnika dyskontującego, który jest oczywiście bardziej realistycznym założeniem. Pewne rozbieżności zostały już wymienione w [26]. Teraz kontynuuję podobną analizę i pokazuję, że uproszczone podejście (tzn. ze stałą stopą) prowadzi do innych rozwiązań oraz statystycznych rezultatów dla obliczonych kosztów eksploatacji. Powoduje to, że przyszłe decyzje są również błędne, jeśli założony jest zbyt uproszczony model.

Struktura niniejszego artykułu jest następująca. W rozdziale 2 przedstawiony został nowy typ funkcji intensywności uszkodzeń (HRF). Omówiona została tam również procedura

generowana z odpowiedniej gęstości, bazującej na tej HRF. W rozdziale 3 wprowadzono model możliwych stanów dla każdego połączenia z dodatkowym parametrem – deterministycznym i bezwarunkowym czasem wymiany. Rozdział 4 jest poświęcony opisowi kosztów eksploatacji, które podzielone są na części stałe i zmienne. Rozdział 5 przedstawia algorytm Kiefiera-Wolfowitza, który jest następnie zastosowany w przykładach w rozdziale 6 do optymalizacji dyskontowanej wartości kosztów eksploatacji. Poza numeryczną analizą przykładu w przypadku crisp, zbadana została również propozycja rozmycia pewnych parametrów modelu z wykorzystaniem symulacji Monte Carlo. Rezultaty, otrzymane w przykładach, są następnie statystycznie podsumowane. Końcowe wnioski zawarto w rozdziale 7.

## 2. Model intensywności uszkodzeń

Założmy, że WDS jest modelowany przez graf połączeń  $G$ . W grafie tym każde połączenie (tzn. rura, która jest elementem całego WDS) jest reprezentowana przez krawędź, a możliwe źródło lub ujście przez węzeł. W dalszej części skupię się jedynie na krawędziach grafu  $G$ , tzn. połączeniach rozważanego WDS. Założmy, że połączenia te zachowują się w sposób niezależny statystycznie, tzn. nie ma „przepływu informacji” pomiędzy połączeniami, a uszkodzenie jednej rury nie wpływa na jakość i możliwe uszkodzenia innych połączeń.

Po pierwsze, założyłem, że czasy uszkodzeń dla każdego z połączeń opisane są funkcją intensywności szkód (hazard rate function, HRF)  $\lambda(x | n_r)$  danej wzorem

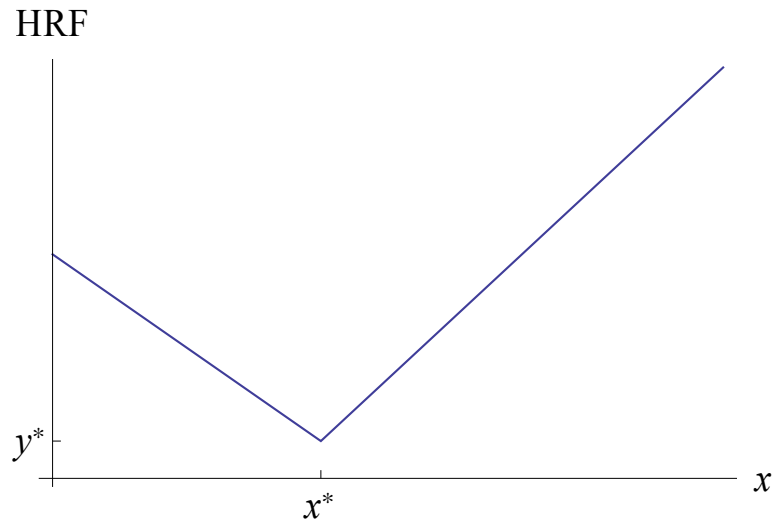
$$\lambda(x | n_r) = \begin{cases} -a_0 x + a_0 x^* + y^* + \alpha_r n_r & \text{if } x \in [0, x^*) \\ a_1 x + y^* - a_1 x^* + \alpha_r n_r & \text{if } x \geq x^* \end{cases}, \quad (1)$$

gdzie  $a_0 > 0, a_1 > 0, x^* > 0, y^* > 0, \alpha_r > 0$  są parametrami, które związane są z danym typem połączenia. Dokładniej rzecz ujmując, taka HRF jest liniowa, V-kształtna (patrz rys. 1), przy czym:

- $-a_0$  jest współrzędną kierunkową liniowej, malejącej części HRF (tzn. lewej strony funkcji dla której  $x \in [0, x^*)$ ),
- $a_1$  jest współrzędną kierunkową liniowej, rosnącej części HRF (tzn. prawej strony funkcji dla której  $x \geq x^*$ ),
- $(x^*, y^*)$  jest punktem, gdzie HRF staje się liniową funkcją rosnącą, zamiast bycia funkcją malejącą,
- $\alpha_r$  jest parametrem opisującym pogarszanie się jakości połączenia, związanym z pojedynczym wcześniejszym uszkodzeniem,
- $n_r$  jest liczbą wcześniejszych uszkodzeń połączenia, dla których następowały potem naprawy.

Zakłada się przy tym, że gdy jakieś połączenie jest wymienione na nowe, to przyjmujemy  $n_r = 0$  dla takiego elementu. Zatem parametr  $\alpha_r$  odpowiada zmęczeniu materiału, które jest powodowane przez kolejne uszkodzenia i naprawy bez wymiany danego połączenia. Wartość ta bezpośrednio zwiększa wartość funkcji  $\lambda(x | n_r)$ . Punkt  $(x^*, y^*)$ , a szczególnie wartość  $x^*$  zależy od momentu, kiedy HRF (1) zmienia swoje zachowanie. W punkcie tym, zamiast okresu burn-in po naprawie (lub instalacji nowej rury), połączenie przechodzi w stan wear-out (patrz również dokładniejszy opis stanów tego typu np. w [5]). Oznacza to, że dla pierwszej części (1) intensywność uszkodzeń zmniejsza się, a dla drugiej części zwiększa się wraz z upływem czasu, co lepiej odzwierciedla rzeczywiste sytuacje. Zatem proponowana funkcja (1) może zostać w bezpośredni sposób użyta do opisu intensywności uszkodzeń, biorąc pod uwagę dwa zupełnie odmienne jakościowo stany oraz postęp zmęczenia materiału połączenia,

który jest zależny od liczby wcześniejszych napraw  $n_r$ . W ten sposób HRF może zostać lepiej dopasowana do danych rzeczywistych.



**Rysunek 1.** Przykładowy wykres wprowadzonej HRF.

Od tego momentu, w celu uproszczenia notacji, używać będę skróconych oznaczeń

$$b_0 = a_0 x^* + y^* + \alpha_r n_r, \quad b_1 = y^* - a_1 x^* + \alpha_r n_r.$$

Dla HRF istnieje ogólny wzór

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{R(x)},$$

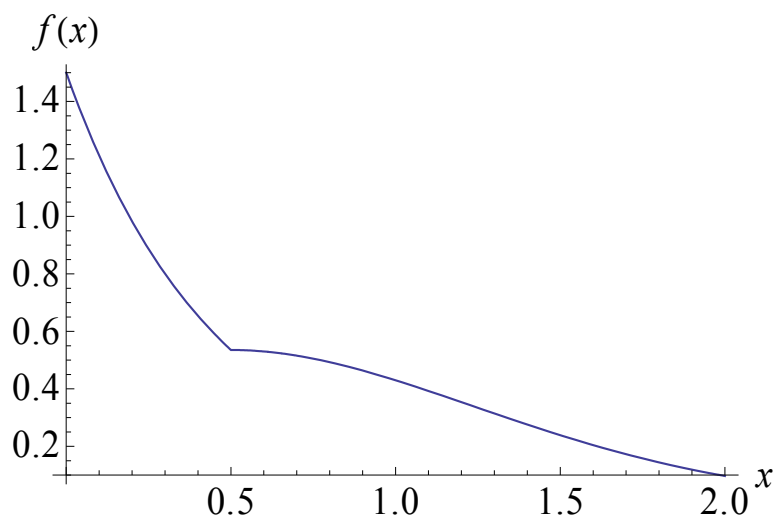
gdzie  $f(x)$  jest gęstością (pdf – probability density function),  $R(x) = 1 - F(x)$ , a  $F(x)$  jest dystrybuantą (cdf – cumulative distribution function), zatem w przypadku formuły (1) otrzymujemy

$$f(x) = \begin{cases} (-a_0 x + b_0) \exp\left(\frac{1}{2} a_0 x^2 - b_0 x\right) & \text{if } x \in [0, x^*) \\ (a_1 x + b_1) \exp\left(-\frac{1}{2} a_1 x^2 - b_1 x - c_1\right) & \text{if } x \geq x^* \end{cases} \quad (2)$$

gdzie

$$c_1 = -\frac{1}{2} a_1 (x^*)^2 - b_1 x^* - \frac{1}{2} a_0 (x^*)^2 + b_0 x^*.$$

Przykładowy wykres tej gęstości można zobaczyć na rysunku 2. Jak łatwo zauważyć,  $f(x)$  jest ciągłą funkcją z widocznym punktem zmiany swojego zachowania (który dany jest w tym przypadku parametrami  $x^* = 0.5, y^* = 1$ ).



Rysunek 2. Przykładowy wykres wprowadzonej gęstości.

W rozdziale 6 przedstawiona jest analiza symulowanych wyników dla czasów uszkodzeń danych gęstością (2). Jest zatem niezbędne do zaproponowania efektywnego algorytmu generowania losowych zmiennych w przypadku tej pdf. Może to zostać zrealizowane z użyciem metody kompozycji i metody odwracania dystrybuanty (stosowne wprowadzenie i opis tych metod znaleźć można np. w [27]). Dla metody kompozycji, gęstość  $f(x)$  przedstawiana jest w postaci

$$f(x) = \sum_{i=1} f_i(x) p_i ,$$

gdzie dla każdego  $i = 1, 2, \dots$ ,  $f_i(x) \geq 0$  jest gęstością, a  $p_i \geq 0$  jest dyskretną wartością prawdopodobieństwa. W przypadku (2) otrzymujemy

$$p_1 = P(X \in [0, x^*)) = 1 - \exp\left(\frac{1}{2} a_0 (x^*)^2 - b_0 x^*\right),$$

$$p_2 = P(X \geq x^*) = 1 - p_1 \quad , \quad (3)$$

a gęstości  $f_1(x)$  (dla  $x \in [0, x^*)$ ),  $f_2(x)$  (dla  $x \geq x^*$ ) prowadzą do odpowiednich funkcji odwrotnych do dystrybuant, które są równe

$$F_1^{-1}(y) = \frac{b_0 - \sqrt{b_0^2 + 2a_0 \ln(1 - p_1 y)}}{a_0} ,$$

$$F_2^{-1}(y) = \frac{-b_1 + \sqrt{(a_1 x^* + b_1)^2 - 2 a_1 \ln(1-y)}}{a_1} \quad . \quad (4)$$

Symulacja losowych czasów uszkodzeń jest zatem bezpośrednia (patrz algorytm 1). Ponadto, ponieważ wykorzystana została metoda odwracania dystrybuanty, cały algorytm jest numerycznie bardzo efektywny. Żaden z losowo generowanych punktów nie jest odrzucany, co jest powszechnie spotykane np. w przypadku metody ROU (ratio-of-uniforms).

**Algorytm 1** (Procedura generacji dla HRF)

**Wejście:** Zestaw parametrów dla HRF (1).

**Wyjście:** Losowy czas uszkodzenia  $X$ .

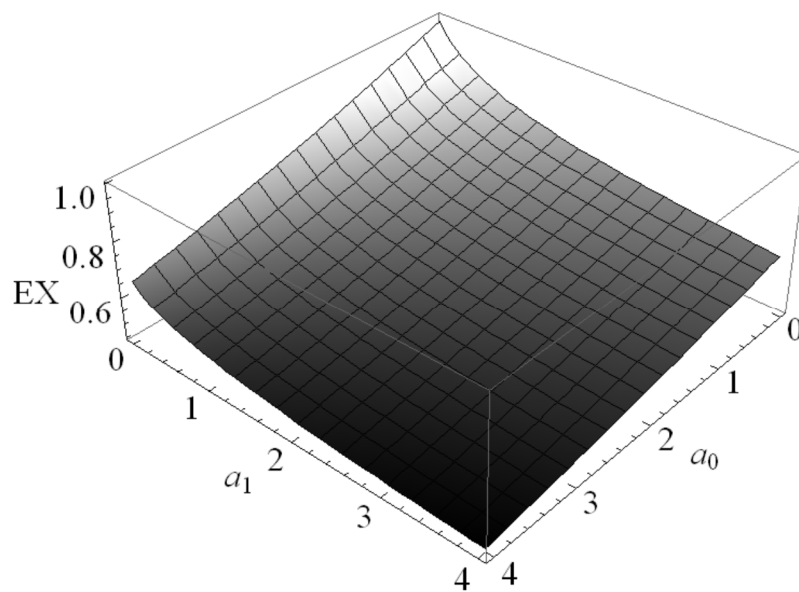
Oblicz  $p_1, p_2$ , które dane są przez (3);

```

Wygeneruj niezależne zmienne  $U, Y$  z rozkładu jednostajnego standardowego  $U[0; 1]$ ;
if  $U \leq p_1$ 
     $X = F_1^{-1}(Y)$  (patrz (4));
else
     $X = F_2^{-1}(Y)$  (patrz (4));
end
return  $X$ 

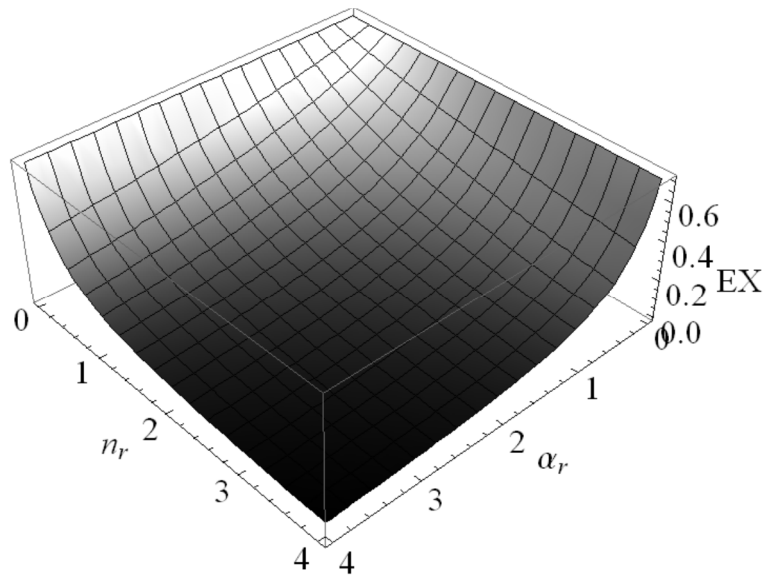
```

Ze względu na kilka parametrów, które opisują wzór (1), wprowadzony model czasu uszkodzeń może zostać zastosowany w wielu przypadkach. Przykładowe wykresy wartości oczekiwanych dla odpowiedniej gęstości (2) można znaleźć na rysunkach 3, 4 i 5. Jak łatwo zauważyć, wartość oczekiwana czasu uszkodzenia jest zarówno funkcją liniową, jak i nieliniową, co upraszcza dopasowanie do złożonych rzeczywistych danych.

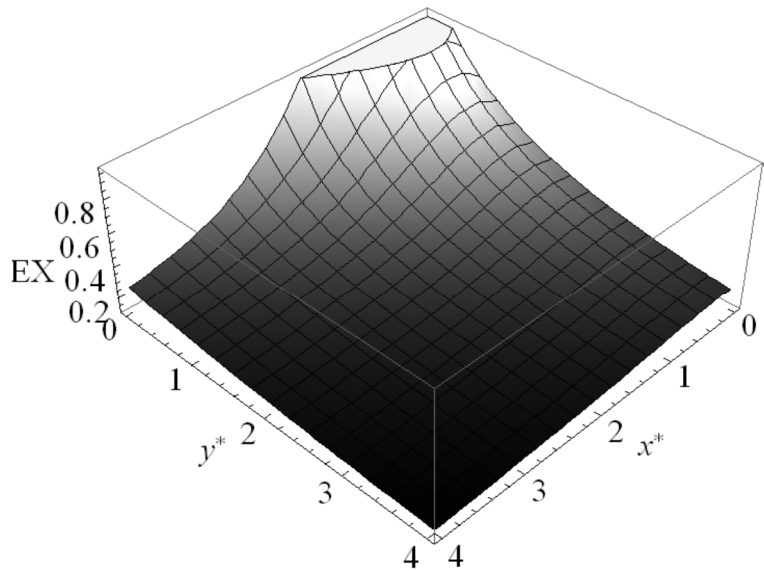


**Rysunek 3.** Wykres wartości oczekiwanej (EX) dla wprowadzonej gęstości jako funkcji  $a_0$  i  $a_1$ .





**Rysunek 4.** Wykres wartości oczekiwanej (EX) dla wprowadzonej gęstości jako funkcji  $\alpha_r$  i  $n_r$ .



**Rysunek 5.** Wykres wartości oczekiwanej (EX) dla wprowadzonej gęstości jako funkcji  $x^*$  i  $y^*$ .

### 3. Stany połączenia

Każde z połączeń w momencie  $t$  może być w jednym z następujących stanów: *działa*, *w trakcie naprawy*, *w trakcie wymiany*. Oznacza to, że zaraz po uszkodzeniu połączenie jest naprawiane lub wymieniane na nowe.

Losowa długość czasu działania  $WT_i$ , po naprawie lub wymianie rury, a przed kolejnym uszkodzeniem, dana jest wzorem (2). Długość czasu naprawy  $RT_i$  (po uszkodzeniu, gdy połączenie jest w trakcie naprawy) może być modelowana za pomocą różnych rozkładów prawdopodobieństwa, np. rozkładu wykładniczego lub lognormalnego. Oczywiście, rozkład ten i jego parametry powinny zostać dopasowane do rzeczywistych danych, np. dzięki użyciu metod statystycznych. Podobne podejście należy zastosować do długości czasu wymiany  $PT_i$  (tzn. po uszkodzeniu, gdy połączenie jest w trakcie jego wymiany na nowe).

Podobnie jak w [26], wprowadzę deterministyczny i bezwarunkowy czas wymiany  $P^*$ . Wartość ta jest wykorzystywana do podjęcia decyzji, czy zamiast jeszcze jednej naprawy, należy raczej wymienić rozważane połączenie. Oznacza to, że jeśli

$$\sum_{i=1}^j WT_i + RT_i > P^* \quad , \quad (5)$$

gdzie  $WT_1, \dots, WT_j$  i  $RT_1, \dots, RT_j$  są czasami działania i napraw po ostatniej wymianie połączenia, to następuje wymiana połączenia na nowe. Następnie przyjmowana jest wartość  $n_r = 0$  w (1), co oznacza, że wymiana taka „restartuje” proces zmęczenia materiału.

#### 4. Koszty eksploatacji

Jak zostało to wskazane w rozdziale 2, możliwe jest bezpośrednio symulowanie czasów działania  $WT_i$  rozważanego połączenia dla gęstości danej przez (2). Jeśli dodatkowo wybierzemy numerycznie efektywne rozkłady dla czasów napraw  $RT_i$  i wymian  $PT_i$  (jak np. rozkład lognormalny), to metody Monte Carlo mogą zostać wykorzystane. Ponadto warunek wymiany (5) może zostać łatwo wbudowany do tego podejścia, bez konieczności przeprowadzania skomplikowanych teoretycznych obliczeń.

Metoda MC może zatem zostać zastosowana do generowania kolejnych stanów każdego połączenia  $j$ , a potem, w analogiczny sposób, do symulowania zachowania się całego WDS. Zakładać będę od teraz, że połączenia zachowują się w niezależnie statystycznie sposób. Jednak również w przypadku pewnego typu zależności procedura MC może zostać użyta. Jak łatwo zauważyć, poza  $WT_i$ ,  $RT_i$  i  $PT_i$ , można obliczyć również dokładne momenty uszkodzeń, kiedy rozpoczynają się niezbędne czynności serwisowe (tzn. naprawy lub wymiany). W dalszej części momenty te będą oznaczane przez  $t_1, t_2, \dots$ .

W artykule tym skupiam się jedynie na kosztach eksploatacji związanych z wymianą lub naprawą. Oczywiście inne typy kosztów (jak koszty strat wody, utrata przychodów itp. – patrz np. [5,11,12,18]) są często rozważane w literaturze. Spośród innych powinienem również wymienić koszty konserwacyjne i diagnostyczne. Są one bardzo istotne, szczególnie w długim horyzoncie czasowym analizy. Niektóre spośród wymienionych kosztów mogą zostać łatwo wprowadzone przy wykorzystaniu podejścia MC. Wydaje się to również możliwe dla kosztów konserwacyjnych i diagnostycznych. Niemniej, ze względu na naturę późniejszych założeń w tym artykule, koszty te związane są raczej z samą HRF, a nie z czasem czynności serwisowej (jak naprawa lub wymiana). Przykładowo, po konserwacji połączenia, wartość  $n_r$  może zmniejszona lub wartości  $a_0$  i  $a_1$  mogą zostać odpowiednio zmienione. Celem tych zmian jest zwiększenie długości przedziału czasowego do następnego uszkodzenia danego przez (1). Niemniej, w takim przypadku podejście symulacyjne jest nadal możliwe. Oczywiście, wprowadzenie innego typu kosztów (jak koszty konserwacyjne) może mieć pewien wpływ na uzyskane wyniki.

Zakładać będę, że wspomniane koszty zależą od rodzaju czynności serwisowej (tzn. czy jest to naprawa lub wymiana), długości tej czynności i typu rozważanego połączenia. Mamy zatem

$$c^{(j)}(t_i) = c_{R,const}^{(j)} + c_{R,var}^{(j)}(RT_{t_i})$$

lub

$$c^{(j)}(t_i) = c_{P,const}^{(j)} + c_{P,var}^{(j)}(PT_{t_i}),$$

gdzie  $c^{(j)}(t_i)$  oznacza całkowitą sumę kosztów dla danego  $j$ -tego połączenia i czasu  $t_i$ , gdy zaczyna się niezbędna czynność serwisowa,  $c_{R,const}^{(j)}$  jest stałą wartością, niezależną od

długości okresu naprawy (lub wymiany w przypadku  $c_{P,const}^{(j)}$ ), tzn. jest to stały koszt, a  $c_{R,Var}^{(j)}(\cdot)$  oznacza zmienny koszt naprawy (lub wymiany dla  $c_{P,Var}^{(j)}(\cdot)$ ), tzn. jest to pewna funkcja długości czynności serwisowej. Jeśli zastosowane jest podejście MC, to zmienne koszty mogą być modelowane na rozmaite sposoby, np. można wykorzystać dodatkowe rozkłady prawdopodobieństwa związane z  $RT_i$  lub  $PT_i$ .

Jak zostało to już wspomniane, zakładam w rozważanym podejściu, że wartość pieniądza zależy od czasu. Stosowane jest zatem pojęcie wartości obecnej (lub przyszłej), szeroko znane w matematyce finansowej (patrz np. [7,27]). Jest to szczególnie użyteczne, jeśli jesteśmy zainteresowani długim horyzontem czasowym  $T$  (jak 20 lub nawet 50 lat), dla którego należy obliczyć estymowane koszty eksploatacji. Koszty te dla różnych planów zarządzania i możliwych scenariuszy mogą zostać łatwo porównane dla tego samego, obecnego momentu, tzn.  $t = 0$ . Prowadzi to do bezpośredniej metody wyboru najlepszej decyzji, biorącej pod uwagę ryzyko finansowe.

W celu obliczenia wartości obecnej całkowitej sumy kosztów napraw i wymian

$$PV(c) = \sum_{i,j} PV(c^{(j)}(t_i)), \quad (6)$$

należy przyjąć pewien model stopy procentowej w celu obliczenia czynnika dyskontującego  $PV(\cdot)$  dla każdego  $c^{(j)}(t_i)$ . W dalszej części wykorzystany jest jednoczynnikowy model Vasicka (patrz np. [7])

$$dr_t = a(b - r_t) + \sigma dW_t, \quad (7)$$

gdzie  $r_t$  jest wartością stopy w chwili  $t$ ,  $W_t$  jest standardowym procesem Wienera, zaś  $a, b, \sigma$  są parametrami tego modelu. Ponadto  $b$  opisuje długoterminową średnią (tzn. trajektoria  $r_t$  kieruje się ku tej wartości w długim okresie),  $a$  obrazuje szybkość powrotu do  $b$ , zaś  $\sigma$  jest zmiennością (volatility) trajektorii opisaną losową składową  $W_t$ .

W podejściu MC należy wykorzystać odpowiedni schemat iteracyjny w celu generowania przyrostów  $\Delta r_t$  procesu (7) (patrz np. [7]). Wartości  $r_t$  dla ustalonych momentów  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  dane są przez

$$r_{t_{i+1}} = \exp(-a(t_{i+1} - t_i))r_{t_i} + b(1 - \exp(-a(t_{i+1} - t_i))) + \sigma \sqrt{\frac{1 - \exp(-2a(t_{i+1} - t_i))}{2a}} Z_i,$$

gdzie  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  są zmiennymi iid z  $N(0,1)$ . Również skumulowany czynnik

$$fv_{(t_i, t_{i+1})} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} r_s ds,$$

który jest niezbędny do obliczenia wartości obecnej, może być łatwo przybliżony (patrz dokładniejszą dyskusję np. w [7,26,27]).

Jak zostało to wskazane w [26], jeśli założona jest zmienna stopa procentowa (jak jednoczynnikowy model Vasicka w tym artykule), to uzyskane wyniki są inne niż dla modelu ze stałą stopą procentową. Różnice te zademonstruję również w przykładach w rozdziale 6.

## 5. Procedura optymalizacyjna

W przypadku numerycznych przykładów, które przedstawione są w rozdziale 6, zainteresowany jestem w znalezieniu rozmaitych miar statystycznych, które są istotne w analizie kosztów eksploatacyjnych. W praktycznych sytuacjach osoba podejmująca decyzję ma przed sobą wiele scenariuszy dotyczących wartości pewnych parametrów. Ze względu na stochastyczną naturę wprowadzonego procesu stopy procentowej (7) i samo zachowanie się WDS, niezbędna jest również procedura optymalizacyjna. Istnieją rozmaite metody, które mogą zostać wykorzystane do rozwiązania wspomnianego problemu min-max o podłożu stochastycznym (patrz np. [9]). Niemniej w dalszej części zastosuję algorytm Kiefera-Wolfowitza (KW) (patrz np. [2]) z pewnymi zmianami, które niezbędne są w rozważanym przypadku.

Ogólnie rzecz biorąc, iteracyjny schemat algorytmu KW bazuje na wzorze

$$X_{n+1} = X_n - a_n \left( \hat{f}(X_n + c_n) - \hat{f}(X_n - c_n) \right) / c_n , \quad (8)$$

gdzie  $X_1$  jest wartością początkową,  $a_n$  i  $c_n$  są dwoma rzeczywistymi, deterministycznymi ciągami, zaś  $\hat{f}(X_n + c_n)$ ,  $\hat{f}(X_n - c_n)$  są estymatorami (bazującymi zazwyczaj na podejściu MC) dla funkcji celu  $f(\cdot)$  dla  $X_n + c_n$  i  $X_n - c_n$ . Celem ciągu (8), który generowany jest przez ten algorytm, jest minimalizacja wartości  $f(x)$ , przy uwzględnieniu parametru decyzyjnego  $x$ . Szybkość i jakość zbieżności do minimum zależy od ciągów  $a_n$  i  $c_n$  (patrz bardziej szczegółową dyskusję dotyczącą niezbędnych wymagań dla tych ciągów np. w [2]).

Zazwyczaj estymatory  $\hat{f}(X_n + c_n)$ ,  $\hat{f}(X_n - c_n)$  bazują tylko na pojedynczych próbach Monte Carlo, które uzyskiwane są dla odpowiednich funkcji  $f(X_n + c_n)$ ,  $f(X_n - c_n)$ . Niemniej w niektórych przypadkach niezbędne jest bardziej wyszukane podejście. W rozważanym przypadku funkcja  $f(x)$  może zachowywać się w bardzo zmienny i nieprzewidywalny sposób ze względu na swoją stochastyczną naturę. W związku z tym wspomniane estymatory, obliczane jako zwykłe średnie metody Monte Carlo, powinny wykorzystywać większe próby. Co więcej, może być korzystnym przechowywanie estymowanych wartości  $f(\cdot)$  z wcześniejszych kroków algorytmu, a nie tylko wartości ostatniej.

W dalszej części eksperymenty numeryczne skupiają się na optymalizacji kosztów eksploatacji, jeśli bezwarunkowy czas wymiany  $P^*$  jest parametrem decyzyjnym w (8). Dokładniej rzecz ujmując, moim celem jest znalezienie

$$\min_{P^*} EPV(c) , \quad (9)$$

tzn. minimum oczekiwanej wartości obecnej całkowitej sumy (6), jeśli  $P^*$  jest parametrem decyzyjnym. Z praktycznego punktu widzenia, bezwarunkowy czas wymiany jest bardzo istotny dla osób podejmujących decyzje, szczególnie jeśli brany pod uwagę jest długi horyzont czasowy. Oczywiście, inne wartości dla WDS mogą być traktowane jako parametry decyzyjne, ale prezentowane podejście można stosować również w takich przypadkach.

## 6. Przykład analizy numerycznej

Zastosuję teraz algorytm KW i symulacje Monte Carlo w celu znalezienia optymalnej wartości bezwarunkowego czasu wymiany  $P^*$ , która będzie rozwiązaniem problemu (9). W celu jej uzyskania przedstawię uproszczony przykład, który jest jednak podobny do przypadku rzeczywistego. W analizie tej HRF, dana przez (1), jest użyta do symulowania czasów uszkodzeń.

Rozpocznę od ogólnego opisu parametrów w rozdziale 6.1. Następnie, w rozdziale 6.2, przedstawię przyjęte numeryczne wartości tych parametrów w przypadku crisp. Wartości te są użyte później, w rozdziale 6.3, do znalezienia optymalnej wartości  $P^*$  w rozważanym problemie optymalizacyjnym. Estymowane są tam również pewne inne statystyczne miary kosztów eksploatacyjnych. W rozdziale 6.4 omówię możliwe problemy związane z suboptymalnością znalezionego rozwiązania. Jest tam również rozważana zależność pomiędzy założonym modelem stopy procentowej i optymalnym rozwiązaniem dla  $P^*$ . Następnie, w rozdziale 6.5, przypomnę podstawowe definicje i notację dotyczącą podejścia rozmytego. To podejście rozmyte zostanie wykorzystane potem w dwóch analizach: po pierwsze, gdy niektóre parametry HRF będą rozmyte (rozdział 6.6), a po drugie, aby zdecydować, czy estymowane wyniki są bardziej wrażliwe na nieprecyzyjność związaną ze stałymi czy zmiennymi częściami kosztów (rozdział 6.7). Rezultaty wszystkich analiz będą podsumowane w rozdziale 6.8. Omawianie przykładu zakończę pewnymi uwagami związanymi z możliwością użycia przedstawionego podejścia w praktycznym zastosowaniu (rozdział 6.9).

### 6.1. Ogólny opis parametrów

Biorąc pod uwagę wcześniejsze rozważania, parametry całego modelu wykorzystywanego w symulacjach mogą zostać podzielone na cztery grupy:

1. parametry danego typu połączenia, które są związane z HRF opisaną przez (1), tzn.  $a_0, a_1, x^*, y^*, \alpha_r, n_r$ ,
2. parametry, które zależą od typu połączenia, jego lokalizacji itd. i związane są z kosztami eksploatacyjnymi  $c_{R,const}, c_{P,const}, c_{R,var}(\cdot), c_{P,var}(\cdot)$  lub długością czasu niezbędnych czynności serwisowych (tzn. napraw i wymian), jak parametry rozkładów prawdopodobieństwa dla  $RT_i$  i  $PT_i$ ,
3. parametry modelu stopy procentowej, które związane są z przyjętym modelem finansowym (7), tzn.  $r_0, a, b, \sigma$ ,
4. inne parametry, jak  $P^*$  i horyzont czasowy całej symulacji  $T$ .

### 6.2. Parametry zastosowane w przypadku crisp

Najpierw skupię się na przypadku crisp. W dalszej analizie, w celu uproszczenia moich rozważań, modelować będę WDS, który składa się z 20 połączeń jednego typu rury. Założymy, że jednostką czasu jest rok, zaś  $x^* = 0.5, y^* = 1$ . Oznacza to, że po pół roku, HRF czasu uszkodzenia zmienia swoje zachowanie i po okresie burn-in, połączenie przechodzi w stan wear-out. W ogólności wartości te mogą być podane przez eksperta. Użycie takiego źródła informacji łączy wiedzę specjalistyczną z klasycznym, probabilistycznym podejściem.

Zakładać również będę, że  $a_0 = a_1 = 1$ . Oznacza to, że liniowe fragmenty funkcji (1) są nachylone pod kątem 45 stopni oraz, jeśli nie było wcześniejszych napraw, oczekiwany czas do następnego uszkodzenia jest równy 0.715 roku. Wartość ta może zostać łatwo znaleziona za pomocą odpowiedniego programu, jak np. *Mathematica*. Jak jest to widoczne ze wzoru (1), jeśli były jakieś wcześniejsze naprawy, cała HRF przesuwa się w górę o czynnik wynikający z pomnożenia przez siebie parametru  $\alpha_r$  i liczby wcześniejszych symulacji  $n_r$ . Założymy, że  $\alpha_r = 0.2$ . Wtedy, po jednej naprawie, czas do kolejnego uszkodzenia skróci się do 0.635 (około 11%).

Następny zestaw parametrów związany jest z kosztami eksploatacji. W dalszej analizie przyjmę założenie o jednej jednostce pieniężnej i użyję  $c_{R,const} = 1, c_{P,const} = 3, c_{R,var}(t) = 100t, c_{P,var}(t) = 100t$ . W ten sposób stały koszt wymiany jest trzy razy

większy niż stały koszt naprawy, a koszty zmienne są liniowymi funkcjami czasu niezbędnego do wykonania czynności serwisowej. Ponadto zmienny koszt wymiany jest taki sam jak odpowiedni koszt naprawy i równy około 0.247 na dzień (plus koszt stały, ponoszony jednokrotnie). Czas czynności serwisowych również powinien być modelowany w jakiś sposób. W dalszej części wykorzystam rozkład wykładniczy w celu opisu zarówno czasu naprawy (z parametrem  $\lambda_R$  dla jej gęstości), jak i czasu wymiany (odpowiednio z parametrem  $\lambda_P$ ). Innego typu rozkłady prawdopodobieństwa, jak np. rozkład lognormalny, są również użyteczne i mają praktyczne zastosowanie w tej dziedzinie. W rozważanym przypadku przyjmę  $\lambda_R = 365$  (zatem wartość oczekiwana czasu naprawy wynosić będzie jeden dzień) i  $\lambda_P = 182.5$  (zatem wartość oczekiwana czasu wymiany równa będzie 2 dni).

Oczywiście w przypadku praktycznych zastosowań odpowiednie parametry rozważanych połączeń powinny być estymowane na podstawie danych rzeczywistych (lub opinii ekspertów).

Ostatnia grupa parametrów, która wspomniana była w rozdziale 6.1, opisuje model stopy procentowej. Dla jednoczynnikowego modelu Vasicka, który jest analizowany w tym artykule, założono, że

$$a = 0.1, b = 0.05, r_0 = 0.04, \sigma = 0.001$$

oraz przyjęty został bardzo długi, pięćdziesięcioletni horyzont czasowy analizy finansowej kosztów eksploatacji (tzn., że  $T = 50$ ). Zatem, w porównaniu do [26], rozważany jest jeszcze dłuższy okres.

### 6.3. Wyniki procedury optymalizacyjnej dla przypadku crisp

Teraz, gdy wszystkie niezbędne parametry zostały przyjęte, algorytm KW znajdujący rozwiązanie problemu (9) może zostać uruchomiony.

W dalszej analizie użyję  $P_0^* = 5$  jako wartości początkowej. Jak zostało to wspomniane w rozdziale 5, ze względu na stochastyczną naturę estymatorów  $\hat{f}(P_n^* + c_n)$ ,  $\hat{f}(P_n^* - c_n)$ , algorytm KW musi być lekko zmodyfikowany. W związku z tym, aby obliczyć wartości  $\hat{f}(P_n^* + c_n)$ ,  $\hat{f}(P_n^* - c_n)$ ,  $m = 100\,000$  symulacji zostanie przeprowadzonych dla każdej z nich w celu znalezienia odpowiednich średnich Monte Carlo.

Po 50 krokach algorytmu KW, została znaleziona optymalna wartość  $P^*$ , która rozwiązuje problem (9). W rozważanym przypadku wynosi ona 3.58. Teraz możemy porównać różnorodne miary statystyczne dotyczące czynności serwisowych dla wartości optymalnej  $P^{**} = 3.58$  i wartości startowej  $P_0^* = 5$ . Rozważać będę estymator zdyskontowanych kosztów obsługi serwisowej ( $\widehat{PV}(c)$ ), średnią liczbę napraw ( $\bar{x}_R$ ) i bezwarunkowych wymian ( $\bar{x}_P$ ), minimalny koszt naprawy ( $\min c_R$ ) i bezwarunkowej wymiany ( $\min c_P$ ), średni koszt naprawy ( $\bar{c}_R$ ) i wymiany ( $\bar{c}_P$ ), maksymalny koszt naprawy ( $\max c_R$ ) i wymiany ( $\max c_P$ ), odchylenie standardowe kosztów naprawy ( $sd(c_R)$ ) i wymiany ( $sd(c_P)$ ).

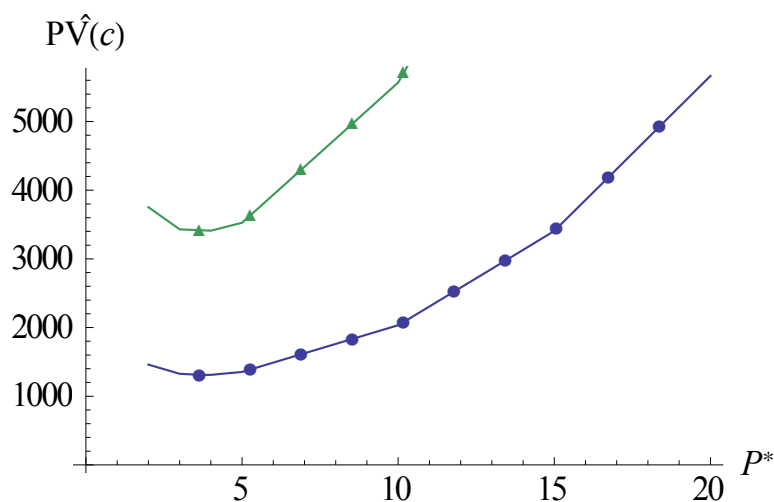
Jak widać to z tabeli 1,  $\widehat{PV}(c)$  jest mniejszy o około 3.39%, jeśli zostanie użyta optymalna wartość  $P^*$ , zaś wartość  $\bar{x}_R$  jest zmniejszona nawet jeszcze bardziej, bo o około 14.21%. Oznacza to, że ogólne zdyskontowane koszty są mniejsze, a naprawy jeszcze rzadsze. Z kolei wartość  $\bar{x}_P$  jest dla  $P^{**}$  większa o około 44.44%. Zatem w tym przypadku częstsze bezwarunkowe wymiany prowadzą do zmniejszenia się liczby napraw. Statystyki kosztów dla pojedynczej naprawy lub wymiany są bardzo podobne dla obydwu wartości  $P^*$ , nie mają one zatem wpływu na uzyskane wnioski.

Miara	$P^{**} = 3.58$	$P_0^* = 5$
$\widehat{PV}(c)$	1307.52	1353.36
$\bar{x}_R$	1929.56	2266.41
$\bar{x}_P$	260	180
$\min c_R$	1	1
$\max c_R$	6.39567	6.22472
$\bar{c}_R$	1.27371	1.27373
$sd(c_R)$	0.273725	0.273755
$\min c_P$	3	3
$\max c_P$	12.3977	12.4351
$\bar{c}_P$	3.54815	3.54807
$sd(c_P)$	0.547971	0.548069

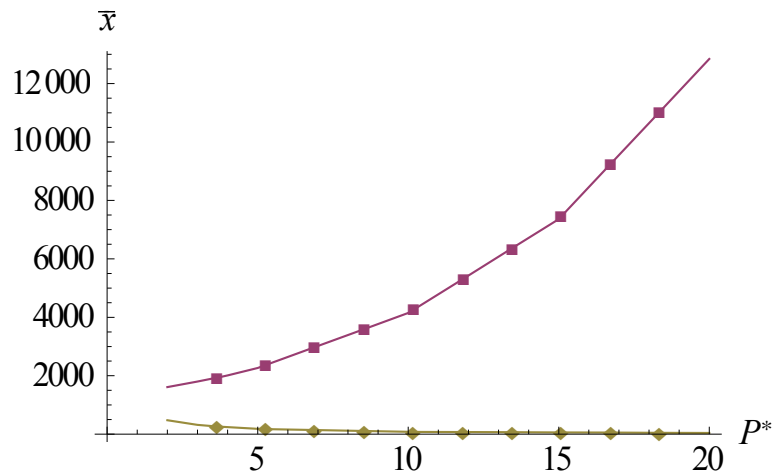
**Tabela 1.** Porównanie miar statystycznych dla czynności serwisowych dla optymalnej wartości i dla wartości początkowej.

#### 6.4. Procedura optymalizacyjna – dodatkowe uwagi

Oczywiście, jeśli użyty jest algorytm KW, jest możliwe, że zamiast optymalnego punktu znajdziemy rozwiązanie suboptymalne. Nie jest tak jednak w rozważanym przykładzie. Na rysunku 6 znajduje się wykres  $\widehat{PV}(c)$  jako funkcji  $P^*$  (zaznaczony kółkami). Jak jest to widoczne, funkcja ta ma kształt litery U. Ponadto rysunek 7 pozwala nam na analizę zachowania średnich  $\bar{x}_R$  (zaznaczonych za pomocą kwadratów) i  $\bar{x}_P$  (oznaczonych rombami). Średnia liczba napraw rośnie bardzo szybko w porównaniu z powolnym zmniejszaniem się średniej liczby wymian. Dobrym pomysłem dla osoby podejmującej decyzję jest zatem wybór znalezionej wartości optymalnej dla  $P^*$ , zamiast wartości mniejszej lub większej.



**Rysunek 6.** Wykres  $\widehat{PV}(c)$  dla jednoczynnikowego modelu Vasicka (kółka) i wartości nominalnej (trójkąty) jako funkcji  $P^*$ .



Rysunek 7. Wykres  $\bar{x}_R$  (kwadraty) i  $\bar{x}_P$  (romby) jako funkcji  $P^*$ .

Jak zostało to pokazane w [26], użycie wartości nominalnej dla przepływu pieniężnego lub modelu ze stałą stopą procentową prowadzi do niepoprawnej estymacji kosztów eksploatacyjnych. Ponieważ rozważam teraz podejście optymalizacyjne, należy sformułować podobny problem – czy, jeśli zmienimy model opisujący przepływy finansowe, zostanie znaleziona inna wartość optymalna dla  $P^*$ ? Zastosowałem zatem algorytm KW również dla modelu z nominalnymi wartościami przepływów pieniężnych (tzn. wartość jednostki pieniężnej jest cały czas taka sama, brak jest dyskontowania). W takim przypadku optymalna wartość dla  $P^*$  wynosi 3.34, co oznacza, że jest o około 6.7% mniejsza niż dla  $P^{**} = 3.58$ .

Można porównać również średnie koszty. Na rysunku 6, poza wykresem  $\widehat{P}\widehat{V}(c)$  dla jednoczynnikowego modelu Vasicka, został stworzony podobny wykres (oznaczony trójkątami) dla średniej jako funkcji  $P^*$  dla nominalnych przepływów pieniężnych. Jak łatwo zauważyć, jeśli nie bierzemy pod uwagę wartości pieniądza w czasie, estymatory średnich nominalnych kosztów usług serwisowych mają zbyt duże wartości, a optymalna wartość  $P^*$  jest przesunięta w lewą stronę.

## 6.5. Podejście rozmyte – podstawowe definicje i oznaczenia

Jak zostało to wskazane w wielu publikacjach (patrz np. [6,8,10,26]), niektóre źródła nieprecyzyjności mogą być łatwo modelowane poprzez podejście rozmyte, gdy wartość nieprecyzyjnego parametru bazuje na wiedzy eksperta. Podejście to jest szczególnie istotne, jeśli danych jest mało, a nie jest użyteczne lub możliwe wykorzystanie różnych metod analizy danych, takich jak statystyka. Wtedy poprzez wzięcie pod uwagę opinii ekspertów, niezbędne parametry modelu mogą zostać opisane jako np. „wartość tego parametru wynosi około 5”. Ponieważ opinie te nie są zupełnie dokładne (jak jest w przypadku liczb rzeczywistych), liczby rozmyte są oczywistym modelem do opisanego tego typu sformułowań.

Ważny krok w zastosowaniu podejścia rozmytego do symulacji kosztów eksploatacji został uczyniony w [26]. Teraz wykonam podobną analizę, ale tym razem dla nowego modelu czasu uszkodzenia, który został zaproponowany w rozdziale 2.

Zacznę od podstawowych definicji i notacji dotyczących podejścia rozmytego, które będzie używane w dalszej części artykułu. Dodatkowe szczegóły znaleźć można np. w [14].

Dla podzbioru rozmytego  $\tilde{A}$  zbioru liczb rzeczywistych  $R$ , przez  $\mu_{\tilde{A}}$  oznaczać będę jego funkcję przynależności  $\mu_{\tilde{A}}: R \rightarrow [0,1]$ , a przez  $\tilde{A}[\alpha] = \{x: \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$   $\alpha$ -cięcie  $\tilde{A}$  dla  $\alpha \in (0,1]$ . Wtedy  $\tilde{A}[0]$  jest domknięciem zbioru  $\{x: \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$ .



Liczba rozmyta  $\tilde{a}$  jest rozmytym podzbiorem  $R$ , przy czym zakładamy, że funkcja  $\mu_{\tilde{a}}$  jest normalna, półciągła z góry, wypukła, o domkniętym nośniku. Wtedy dla każdego  $\alpha \in [0,1]$ ,  $\alpha$ -cięcie liczby  $\tilde{a}[\alpha]$  jest domkniętym przedziałem  $\tilde{a}[\alpha] = [a_L[\alpha], a_U[\alpha]]$ , dla którego  $a_L[\alpha], a_U[\alpha] \in R$  i  $a_L[\alpha] \leq a_U[\alpha]$ .

Liczba rozmyta L-R (dalej skrótowo określana jako LRFN – left-right fuzzy number) jest to liczba rozmyta o funkcji przynależności postaci

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{x-a}{b-a}\right), & x \in [a, b] \\ 1, & x \in [b, c] \\ R\left(\frac{d-x}{d-c}\right), & x \in [c, d] \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases},$$

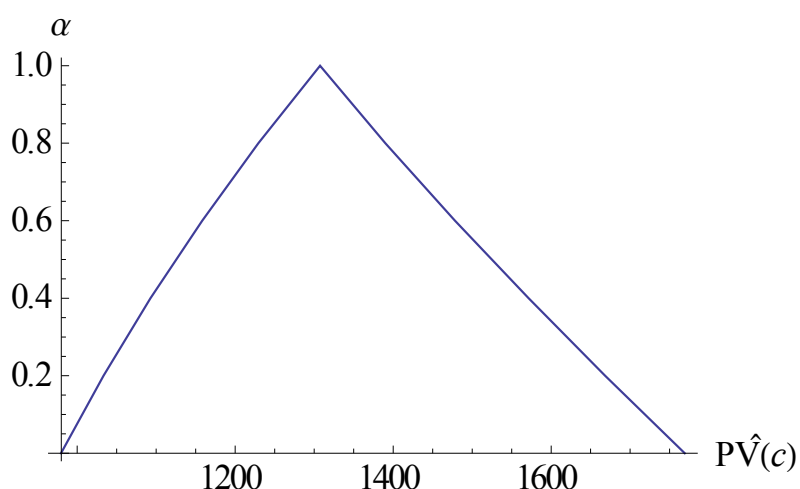
gdzie  $L, R: [0,1] \rightarrow [0,1]$  są niemalejącymi funkcjami, takimi, że  $L(0) = R(0) = 0$  i  $L(1) = R(1) = 1$ . Trójkątna liczba rozmyta, oznaczana dalej przez  $[a, b, c]$ , jest to LRFN, której funkcja przynależności ma postać

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b] \\ \frac{x-c}{b-a}, & x \in [b, c] \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$

W dalszej części moich rozważań, zachowanie funkcji  $f(x)$  odgrywa szczególną rolę. W celu przybliżenia rozmytego wyniku  $\tilde{f}(\tilde{x})$  dla pewnego rozmytego parametru  $\tilde{x}$ , należy sprawdzić monotoniczność  $f(x)$ . Jeśli  $f(x)$  jest funkcją niemalejącą, wtedy dla ustalonego  $\alpha$ , lewy kraniec  $f_L[\alpha]$  przybliżony jest przez wartość dokładną  $x_L[\alpha]$ . To samo dotyczy  $f_U[\alpha]$  i  $x_U[\alpha]$ . W przeciwnym przypadku, jeśli  $f(x)$  jest funkcją nierosnącą, należy użyć  $x_U[\alpha], x_L[\alpha]$  do obliczenia  $[f_L[\alpha], f_U[\alpha]]$  (patrz np. [19,26]).

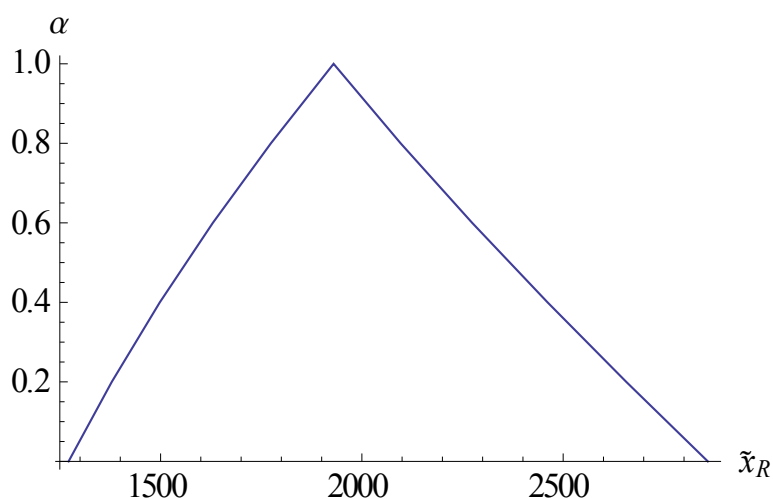
## 6.6. Numeryczna analiza dla rozmytych parametrów $x^*, y^*$

Po rozważeniu przypadku crisp, przedyskutowany zostanie przypadek rozmyty. Najpierw założę, że  $x^*, y^*$  są modelowane za pomocą trójkątnych liczb rozmytych, a wszystkie pozostałe parametry są dane za pomocą wartości dokładnych, takich samych jak w rozdziale 6.2. Jak zostało wskazane, zarówno  $x^*$  jak i  $y^*$  bazować mogą na wiedzy ekspertów, zatem liczby rozmyte są oczywistym wyborem przy modelowaniu tych parametrów. W dalszej części przyjmę  $\tilde{x}^* = [0.25, 0.5, 0.75]$  oraz  $\tilde{y}^* = [0.5, 1, 1.5]$ . Oznaczać to będzie, że pozioma współrzędna punktu, w którym wprowadzona HRF (1) zmienia swoje zachowanie, wynosić będzie „około 0.5”, zaś jego współrzędna pionowa „około 1” z nieprecyzyjnością równą „plus / minus 50%”. Wykorzystując te rozmyte wartości  $\tilde{x}^*, \tilde{y}^*$ , estymator Monte Carlo dla zdyskontowanych kosztów obsługi  $\widehat{P\bar{V}}(c)$  może zostać znaleziony dla wcześniej estymowanej optymalnej wartości  $P^{**}$ . Jak widać to z rysunku 8, uzyskany wynik jest lekko prawoskośną LRFN. Jej nośnik jest równy  $[979.649, 1769.21]$ , co oznacza zmianę -25% i +35% w stosunku do jądra  $\widehat{P\bar{V}}(c)$  (i jednocześnie wartości dokładnej  $\widehat{P\bar{V}}(c)$ , której estymator obliczono w rozdziale 6.3). Parametry  $x^*, y^*$  mają zatem istotny wpływ na estymowane zdyskontowane koszty.



**Rysunek 8.** Wykres  $\widehat{PV}(c)$  jako liczby rozmytej dla  $\tilde{x}^* = [0.25, 0.5, 0.75]$  i  $\tilde{y}^* = [0.5, 1, 1.5]$ .

Ponadto rozmycie parametrów  $x^*, y^*$  ma wpływ na średnią liczbę napraw. Jak wynika to z rysunku 9, dla  $\tilde{x}^* = [0.25, 0.5, 0.75]$  i  $\tilde{y}^* = [0.5, 1, 1.5]$  odpowiednia rozmyta średnia  $\tilde{x}_R$  jest również lekko prawoskośną LRFN. Jej nośnik jest równy  $[1271.46, 2859.13]$ , co oznacza  $-34\%$  i  $+48\%$ , jeśli przedział ten porównamy z jądrem  $\tilde{x}_R$ . Zatem zmienność  $\tilde{x}_R$  jest większa niż  $\widehat{PV}(c)$ . Oznacza to również, że optymalna wartość dla  $P^*$  powinna zostać obliczona w przypadku każdego analizowanego punktu  $x^*, y^*$ . Przykładowo, 0-cięcie (tzn.  $\alpha$ -cięcie liczby rozmytej dla którego  $\alpha = 0$ ) dla  $\tilde{P}^*$  jest równe  $[3.15, 4.45]$  dla wcześniej wspomnianych wartości  $\tilde{x}^*$  i  $\tilde{y}^*$ . Estymatory  $PV(c)$  i miary statystyczne dla kosztów napraw i wymian dla lewego i prawego końca tego 0-cięcia można znaleźć w tabelicy 2.



**Rysunek 9.** Wykres  $\tilde{x}_R$  jako liczby rozmytej dla  $\tilde{x}^* = [0.25, 0.5, 0.75]$  i  $\tilde{y}^* = [0.5, 1, 1.5]$ .

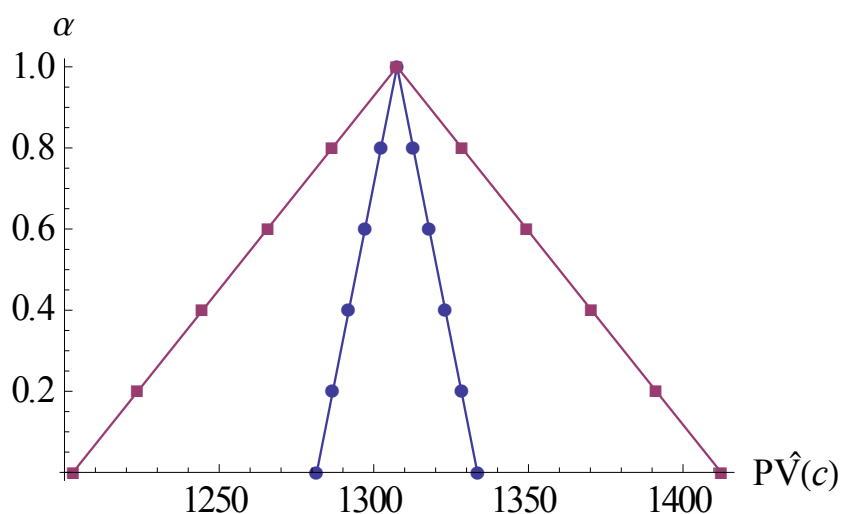
Miara	$P_L[0] = 3.15$	$P_U[0] = 4.45$
$\widehat{PV}(c)$	1758.44	968.028
$\tilde{x}_R$	2720.12	1389.72
$\tilde{x}_P$	300	220
$\min c_R$	1	1
$\max c_R$	6.32746	6.01543
$\bar{c}_R$	1.27363	1.27373
$sd(c_R)$	0.273637	0.273719

$\min c_p$	3	3
$\max c_p$	12.2116	12.3969
$\bar{c}_p$	3.54795	3.54803
$sd(c_p)$	0.547883	0.548142

**Tabela 2.** Porównanie miar statystycznych dla kosztów czynności serwisowych dla lewego i prawego końca  $\tilde{P}^*[0]$ .

### 6.7. Numeryczna analiza rozmytych parametrów kosztów

Poza parametrami HRF, można zbadać również wpływ rozmycia innych wartości. Przykładowo, osoba podejmująca decyzje może być zainteresowana znalezieniem odpowiedzi na pytanie, czy wartości stałe czy też ich zmienne odpowiedniki są bardziej wrażliwe na brak precyzji w opinii eksperta. Ponownie symulacje Monte Carlo prowadzą do bezpośredniego rozwiązania tego problemu, które zobaczyć można na rysunku 10. W tym przypadku zakładam, że odpowiednie koszty są „około plus / minus 10%”, tzn.  $\tilde{c}_{R,const} = [0.9, 1, 1.1]$ ,  $\tilde{c}_{P,const} = [2.7, 3, 3.3]$  (wykres dla rozmytych stałych kosztów oznaczony jest kwadratami) i  $\tilde{c}_{R,var} = [90, 100, 110]$ ,  $\tilde{c}_{P,var} = [90, 100, 110]$  (wykres dla rozmytych zmiennych kosztów oznaczony kółkami). Jak łatwo zauważyć, stałe części kosztów eksploatacyjnych mają większy wpływ na estymowane koszty całkowite. W obydwu przypadkach wyniki są trójkątnymi liczbami rozmytymi. Dla rozważanych rozmytych zmiennych kosztów, odpowiedni nośnik dany jest przez  $\pm 1.98\%$  (jeśli porównamy go z estymatorem crisp  $PV(c)$ ), a w przypadku rozmytych kosztów stałych nośnik ten jest jeszcze szerszy ( $\pm 8\%$ ).



**Rysunek 10.** Wykres  $\widehat{PV}(c)$  dla liczb rozmytych  $\tilde{c}_{R,const} = [0.9, 1, 1.1]$ ,  $\tilde{c}_{P,const} = [2.7, 3, 3.3]$  (kwadraty) i  $\tilde{c}_{R,var} = [90, 100, 110]$ ,  $\tilde{c}_{P,var} = [90, 100, 110]$  (kółka).

Oczywiście analizować można więcej niż jedno źródło braku precyzji modelowane podejściem rozmytym. Wykorzystując symulacje Monte Carlo możliwym jest obserwowanie interakcji pomiędzy wieloma źródłami, np. parametrami HRF, kosztami itd.

### 6.8. Podsumowanie wyników

Biorąc pod uwagę wcześniejsze analizy, można podsumować pewne wnioski dotyczące ich wyników:

- W rozważanym przypadku, ogólne zdyskontowane koszty obsługi serwisowej są mniejsze (o około 3.39%), a naprawy znacznie rzadsze (o około 14.21%) dla optymalnego rozwiązania. Procedura optymalizacyjna nie ma wpływu na koszty pojedynczej naprawy lub wymiany.
- Może się zdarzyć, że wykorzystanie wartości nominalnych przepływów pieniężnych, zamiast bardziej realistycznej zmiennej stopy procentowej, prowadzi do nieprawidłowych wyników procedury optymalizacyjnej, jak również innych statystyk kosztów.
- Rozmycie różnych parametrów wprowadzonego modelu jest wykonalne. Przykładowo, rozmyte wartości  $\tilde{x}^*$  i  $\tilde{y}^*$  mają istotny wpływ na estymowane zdyskontowane koszty i obliczone średnie liczby napraw. Ponadto procedura optymalizacyjna powinna być zastosowana dla każdego pojedynczego zestawu parametrów.
- Można rozwiązać wiele praktycznych problemów wykorzystując symulacje i podejście rozmyte. W rozważanym przypadku rozmytym okazało się, że stałe części kosztów mają większy wpływ na estymowane całkowite koszty niż ich zmienne odpowiedniki.

## 6.9. Ku praktycznemu zastosowaniu

Jak zostało to wspomniane, wcześniej przedstawiony przykład był pewnym uproszczeniem. Niemniej niektóre jego własności mogą zostać bezpośrednio przeniesione do rzeczywistego zastosowania. Przykładowo, zamiast tylko 20 połączeń jednego typu, można rozważać kilka setek lub nawet kilka tysięcy połączeń wraz z wieloma ich typami. Można to osiągnąć używając symulacji Monte Carlo, ponieważ wprowadzona w tym artykule HRF jest numerycznie efektywnym algorytmem. To samo dotyczy procedury optymalizacyjnej, która jest liniowo zależna od liczby symulacji (tzn. połączeń).

Wydaje się, że bardziej złożony problem związany jest z procedurą estymacji dla wykorzystanych parametrów. Jeśli rozważamy wiele połączeń, estymacja niezbędnych parametrów HRF dla każdego pojedynczego typu połączenia może być dość pracochłonna. W sytuacjach praktycznych jest też możliwe, że należy wziąć pod uwagę inne rodzaje kosztów (patrz również dyskusja w rozdziale 4) oraz inne efekty (jak wymóg naprawy całej grupy połączeń w jednym terminie). Prowadzi to bezpośrednio do bardziej skomplikowanego modelu i dłuższego czasu wykonania niezbędnych symulacji.

## 7. Podsumowanie

W artykule tym zaproponowany został nowy rodzaj funkcji intensywności dla czasów pomiędzy uszkodzeniami rurociągu. Owa HRF jest V-kształtną funkcją, która zależy również od liczby wcześniejszych napraw danego połączenia. Ponadto czasy uszkodzeń mogą być łatwo generowane z użyciem symulacji Monte Carlo, jeśli zostanie wykorzystana wspomniana HRF. Następnie został wprowadzony model kosztów związany z typem wykonywanej czynności serwisowej i jej długością.

Koszty te podzielone są na dwie części, co ułatwia zastosowanie tego podejścia w rzeczywistych sytuacjach. W celu obliczenia wartości obecnej kosztów eksploatacji użyto jednoczynnikowego modelu Vasicka. Jak zostało to wskazane w trakcie dokładniejszej analizy, uzyskane wyniki ściśle zależą od przyjętego rodzaju czynnika dyskontującego (tzn. czy jest to model zmiennej czy stałej stopy procentowej). W trakcie numerycznej analizy symulowano zachowanie się całego WDS za pomocą metody Monte Carlo. Następnie koszty czynności serwisowej (tzn. napraw i wymian) zostały obliczone i statystycznie podsumowane.

W artykule tym głównym celem przeprowadzonych symulacji jest minimalizacja kosztów eksploatacyjnych. W związku z tym wykorzystana została procedura optymalizacyjna, bazująca na algorytmie Kiefera-Wolfowitza. Poza podejściem crisp, rozważano również rozmycie niektórych parametrów wprowadzonych modeli. Takie zastosowanie liczb rozmytych prowadzi do lepszego wykorzystania wiedzy ekspertów i poprawniejszego, bliższego rzeczywistym sytuacjom modelowania tych niepewnych parametrów. Przedstawiono również odpowiednie przykłady symulowanych rezultatów zarówno dla przypadku crisp, jak i rozmytego.

## Literatura

1. Amani N, Ali N M, Mohammed A H, Samat R A. Maintenance and management of wastewater system components using the condition index system, prediction process and costs estimation. *Eksploracja i Niezawodność – Maintenance and Reliability*. 2013; 15(2): 161–168.
2. Broadie M, Cicek D, Zeevi A. General bounds and finite-time improvement for the Kiefer-Wolfowitz stochastic approximation algorithm. *Operations Research*. 2011; 59(5): 1211–1224.
3. Buckley J J. *Simulating Fuzzy Systems*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.
4. Clark R M, Thurnau R C. Evaluating the risk of water distribution system failure: A shared frailty model. *Front. Earth Sci*. 2011; 5(4): 400–405.
5. Fadaee M J, Tabatabaei R. Estimation of failure probability in water pipes network using statistical model. *Engineering Failure Analysis*. 2011; 18: 1184–1192.
6. Gil M A, Hryniewicz O. Statistics with Imprecise Data. In: Meyers R A (ed.). *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*. New York: Springer-Verlag, 2009.
7. Glasserman P. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. New York: Springer, 2004.
8. Gonzalez A, Pons O, Vila M A. Dealing with uncertainty and imprecision by means of fuzzy numbers. *International Journal of Approximate Reasoning*. 1999; 21: 233–256.
9. Homem-de-Mello T, Bayraksan G. Monte Carlo sampling-based methods for stochastic optimization. *Surveys in Operations Research and Management Science*. 2014; 19: 56–85.
10. Hryniewicz O, Kaczmarek K, Nowak P. Bayes statistical decisions with random fuzzy data – An application for the Weibull distribution. *Eksploracja i Niezawodność – Maintenance and Reliability*. 2015; 17(4): 610–616.
11. Kanakoudis V K, Tolikas D K. Assessing the performance level of a water system. *Water, Air, and Soil Pollution*. 2004; 4: 307–318.
12. Kleiner Y, Adams B J, Rogers J S. Long-term planning methodology for water distribution system rehabilitation. *Water Resources Research*. August 1998; 34(8): 2039–2051.
13. Kumar G, Jain V, Gandhi O P. Steady-state availability analysis of repairable mechanical systems with opportunistic maintenance by using semi-Markov process. *Int J Syst Assur Eng Manag*. 2014; 5(4): 664–678.
14. Lee K H. *First Course on Fuzzy Theory and Applications*. Berlin Heidelberg: Springer, 2005.
15. Liu Z, Kleiner Y, Rajani B, Wang L, Condit W. *Condition Assessment Technologies for Water Transmission and Distribution Systems*. Washington DC: U.S. Environmental Protection Agency, 2012; EPA/600/R-12/017.

16. Malinowski J. A newly developed method for computing reliability measures in a water supply network. *Operations Research and Decisions*. 2016; 26(4): 49–64.
17. Marchionni V, Cabrala M, Amadoa C, Covasa D. Water supply infrastructure cost modelling. *Procedia Engineering*. 2015; 119: 168–173.
18. Neelakantan T R, Suribabu C R, Lingireddy S. Optimisation procedure for pipe-sizing with break-repair and replacement economics. *Water SA*. April 2008; 34(2): 217–224.
19. Nguyen H T. A Note on the Extension Principle for Fuzzy Sets. *Journal Mathematical Analysis and Applications*. 1978; 64: 369–380.
20. Nowak P, Romaniuk M. Application of Levy processes and Esscher transformed martingale measures for option pricing in fuzzy framework. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2014; 263: 129–151.
21. Nowak P, Romaniuk M. Catastrophe bond pricing for the two-factor Vasicek interest rate model with automatized fuzzy decision making. *Soft Computing*. 2017; 21(10): 2575–2597.
22. Pietrucha-Urbanik K, Studziński A. Case study of failure simulation of pipelines conducted in chosen water supply system. *Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability*. 2017; 19 (3): 317–322.
23. Rojek I, Studziński J. Comparison of different types of neuronal nets for failures location within water-supply networks. *Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability*. 2014; 16 (1): 42–47.
24. Rokstad M M, Ugarelli R M. Minimising the total cost of renewal and risk of water infrastructure assets by grouping renewal interventions. *Reliability Engineering and System Safety*. 2015; 142: 148–160.
25. Romaniuk M. Application of Markov chain and interest rate process for forecasting of costs of maintenance of pipelines. In: Wittmann J, Wieland R. (eds.) *Simulation in Umwelt- und Geowissenschaften*. Workshop Müncheberg 2015. Aachen: Shaker Verlag, 2015.
26. Romaniuk M. On simulation of maintenance costs for water distribution system with fuzzy parameters. *Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability*. 2016; 18(4): 514–527.
27. Romaniuk M, Nowak P. Monte Carlo methods: theory, algorithms and applications to selected financial problems. Warszawa: ICS PAS, 2015.
28. Røstum J. Statistical modelling of pipe failures in water networks. Ph.D. dissertation. 2000.
29. Scheidegger A, Leitão J P, Scholten L. Statistical failure models for water distribution pipes – A review from a unified perspective. *Water Research*. 2015; 83: 237–247.