

**dr inż. Anna Borucka**

Military University of Technology  
gen. Sylwestra Kaliskiego 2, 01-476, Warsaw, Poland  
E-mail: [anna.borucka@wat.edu.pl](mailto:anna.borucka@wat.edu.pl)

**prof. dr hab. inż. Andrzej Niewczas**

Motor Transport Institute,  
Jagiellońska 80, 03-301, Warsaw, Poland  
E-mail: [andrzej.niewczas@its.waw.pl](mailto:andrzej.niewczas@its.waw.pl)

**dr Kamila Hasilova**

University of Defence,  
Kounicova 65, 662 10 Brno, Czech Republic  
E-mail: [kamila.hasilova@unob.cz](mailto:kamila.hasilova@unob.cz)

**Prognozowanie gotowości pojazdów specjalnych na podstawie  
modelu semi -Markowa  
Forecasting the readiness of special vehicles  
using the semi-Markov model**

**Keywords:** *vehicle exploitation system, special vehicles, readiness, semi-Markov model.*

**Abstract:** The vehicle exploitation system, consisting of statistically identical objects that perform intervention tasks, not subject to systematic changes can be modelled as a stationary stochastic process. Such a model allows to determine the probabilistic indicators of current and boundary readiness of the system. This article presents the use of the semi-Markov process, based on three operating states: operation, ready-to-be-used and repair to study a transport system consisting of special vehicles. On the example of a sample consisting of police patrol cars, experimental studies of the intensity of fleet utilization, time of failure-free operation of vehicles were carried out and it was demonstrated that the examined transport system is characterized by a satisfactory, stationary readiness coefficient. The developmental possibilities of the presented modelling method were emphasized.

**Keywords:** *system eksploatacji samochodów, pojazdy specjalne, gotowość, model semi-Markowa.*

**Streszczenie:** System eksploatacji samochodów, które realizują zadania interwencyjne, niepodlegający systematycznym zmianom może być modelowany jako stacjonarny proces stochastyczny. Taki model pozwala wyznaczyć probabilistyczne wskaźniki bieżącej i granicznej gotowości systemu.

W niniejszym artykule, do modelowania systemu eksploatacji pojazdów specjalnych, wykorzystano proces semi-Markowa, oparty na trzech stanach eksploatacyjnych: użytkowania, postoju użytkowego i naprawy. Na przykładzie próby radiowozów policyjnych przeprowadzono doświadczalne badania intensywności użytkowania floty, czasu bezawaryjnej pracy pojazdów a także wykazano, że badany system transportowy charakteryzuje się zadowalającym, stacjonarnym współczynnikiem gotowości. Podkreślono rozwojowe możliwości przedstawionej metody modelowania.

## **1. Wstęp**

Proces eksploatacji pojazdów użytkowych można analizować zarówno w przedsiębiorstwach transportu samochodowego, które funkcjonują w warunkach rynkowych, jak również w służbach ratowniczych i innych, odpowiedzialnych za bezpieczeństwo państwa, takich jak straż pożarna, wojsko, policja, pogotowie ratunkowe. W pierwszej grupie najważniejszym kryterium oceny jakości eksploatacyjnej pojazdu jest efektywność, zazwyczaj wymiarowana

jako stosunek zysków do kosztów [1]. Druga grupa, w tym szczególnie policja, utożsamiana jest przede wszystkim z zapewnieniem spokoju obywatelom, ochroną życia i zdrowia ludzi oraz mienia, a także troską o porządek. Dlatego większość badań prowadzonych w tym obszarze tematycznym związana jest głównie z szeroko pojętymi kwestiami bezpieczeństwa i dotyczy na przykład:

1. Szacowania prawdopodobieństwa wypadku śmiertelnego w przypadku poruszania się samochodami policyjnymi [3] oraz oceny ryzyka zdarzeń drogowych w tym występowania poważnych urazów wynikających z uczestnictwa w akcjach policyjnych [6, 25].
2. Możliwości zwiększenia poziomu bezpieczeństwa realizacji akcji policyjnych poprzez zastosowanie specjalnych metod czy urządzeń np. proponowanych przez Michaelson'a kuloodpornych paneli montowanych na radiowozach [27] czy opisywanych przez Lyons'a systemów świateł ostrzegawczych [26].
3. Metod planowania i optymalizacji tras patroli [8, 10], ze szczególnym uwzględnieniem kwestii bezpieczeństwa [4], a także niezbędnej liczby samochodów patrolowych w zależności od natężenia realizowanych czynności i pory dnia ich występowania [22].

Natomiast gotowość i niezawodność pojazdów policyjnych uważana jest za swoiste status quo. Prezentowane w literaturze badania dotyczące oceny gotowości złożonych systemów interwencyjnych (nie tylko policji), mają charakter jednostkowy. Wynika to przede wszystkim z ograniczeń związanych z poufny charakterem danych empirycznych. Dokumentacja ewidencyjno – rozliczeniowa prowadzona jest zazwyczaj w postaci papierowej a praktyka tworzenia elektronicznych baz danych, napotyka na bariery organizacyjne.

Zadania transportowe są procesami złożonymi, co powoduje że ich modelowanie w oparciu o klasyczne techniki teorii niezawodności może być zawile i nie dawać satysfakcjonujących wyników [21]. Wówczas wykorzystywane są alternatywne metody, np. proponowane przez Lu i współautorów [24] lub Dong'a i innych [9] niezawodnościowe diagramy fazowe, a także procesy Markowa [11, 16, 34], które w ocenie gotowości są szczególnie popularne. W literaturze można odnaleźć modele opisujące pojedyncze środki transportu, np. samochód osobowy – jak u Girtlera i Ślęzaka [12], autobus u Landowskiego i innych [23], czy śmigłowiec u Szawłowskiego [33]. Badane są także złożone systemy transportowe. Podstawy teoretyczne takich rozważań zawierają prace [2, 13, 20]. Systemy analizowane są jako całość [7, 32, 35] lub ich poszczególne składowe rozpatrywane są niezależnie, a każda z nich opisywana jest oddzielnym modelem. Często autorzy wskazują procesy Markowa jako narzędzie rozwiązania szczególnego problemu eksploatacyjnego [29, 30]. Niestety, modele systemów transportowych, oparte na danych empirycznych są nieliczne. Dostępne są pojedyncze opracowania, np. Migawa [28], badań w ten sposób system eksploatacji autobusów miejskich, Żurek i Tomaszewska [39] analizowali statki powietrzne, a Restel [31] systemy miejskiego transportu kolejowego.

Przegląd literatury pokazuje, że modele Markowa są dobrym narzędziem oceny gotowości zarówno całych systemów, jak i pojedynczych obiektów [5, 19]. Mają jednak swoje wymagania i ograniczenia. Należy do nich przede wszystkim postać dostępnych obserwacji, których rozkład powinien być wykładniczy. Jest to element często pomijany w prezentowanych analizach, co powoduje, że stosowanie procesów Markowa jest nadużywane. Trudniejsze w estymacji parametrów i dlatego mniej popularne są modele semi-Markowa. Mają one mniej restrykcyjne wymagania dotyczące postaci rozkładów badanych zmiennych (mogą być dowolne), dlatego zostały zaproponowane w niniejszym artykule, jako narzędzie oceny floty radiowozów policyjnych. Celem zaprezentowanego badania było oszacowanie poziomu ich gotowości przy założeniu trzech stanów eksploatacyjnych: użytkowania, postoju użytkowego i naprawy (obsługiwania technicznego) oraz przedstawienie metody stochastycznego opisu procesu eksploatacyjnego. Ponadto intencją

autorów było podkreślenie, że trzystanowy model eksploatacji może być użytecznym i wystarczającym narzędziem oceny gotowości pojazdów specjalnych. Zastosowanie takiego modelu nie wymaga skomplikowanych obliczeń jak ma to miejsce w przypadku rozbudowanych modeli kilkunastostanowych i może być wykorzystywane w bieżącej praktyce zarządzania flotą pojazdów.

## 2. Badania eksploatacyjne i analiza wstępna wyników

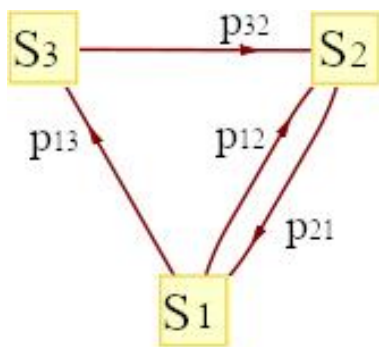
Przedmiotem badania były radiowozy policyjne, realizujące zadania patrolowe i interwencyjne na terenie miasta stołecznego Warszawy. Analizie poddano 20 oznakowanych samochodów osobowych marki Kia. Wszystkie samochody pochodziły z tej samej partii produkcyjnej, co pozwoliło uznać próbę za jednorodną. Bazę danych źródłowych stanowiła dokumentacja użytkowania radiowozów dotycząca patroli policyjnych oraz rejestry obsługi technicznych i napraw.

Na podstawie zgromadzonych obserwacji wyodrębniono trzelementowy zbiór stanów eksploatacyjnych  $S = \{S_1, S_2, S_3\}$ , w których przebywają pojazdy:

- użytkowanie ( $S_1$ ),
- postój użytkowy ( $S_2$ ),
- naprawa (również obsługiwanie techniczne) ( $S_3$ ).

Przyjęto, że czas przebywania pojazdu w stanie  $S_1$  (czas trwania stanu  $S_1$ ) zawiera się w przedziale od chwili wyjazdu w celu wykonania zadania interwencyjnego (patrolu), do chwili powrotu pojazdu do zajezdni. Czas przebywania pojazdu w stanie  $S_2$  (czas trwania stanu  $S_2$ ) zawiera się od chwili rozpoczęcia postoju w zajezdni w oczekiwaniu na dyspozycję wykonania zadania do chwili wyjazdu. Czas przebywania pojazdu w stanie  $S_3$  (czas trwania stanu  $S_3$ ) wyznaczają chwile rozpoczęcia i zakończenia obsługiwanie technicznego.

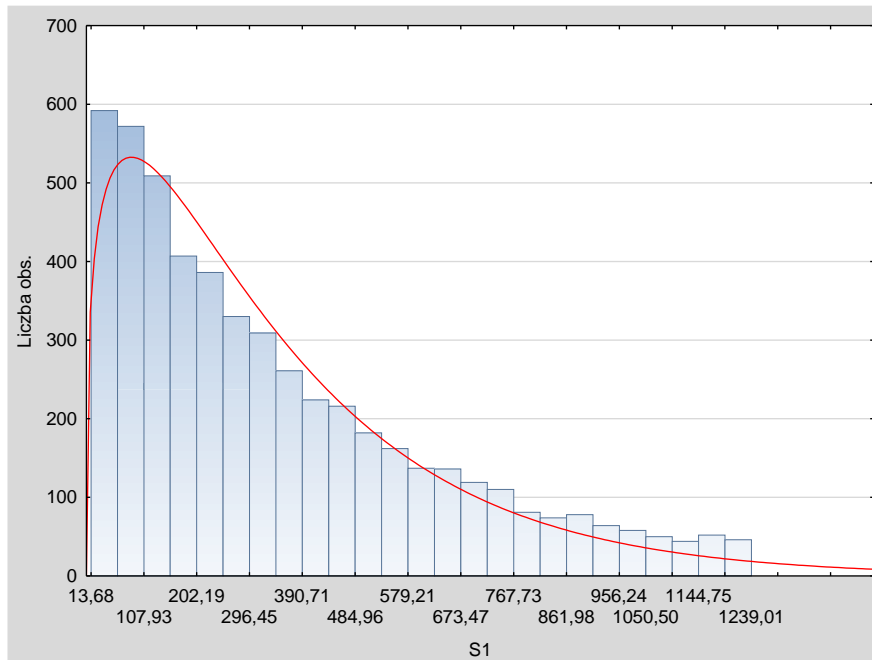
Następnie w oparciu o rzeczywiste relacje międzystanowe ustalono przejścia dozwolone, które, w formie grafu, zaprezentowano na rys. 1.



Rysunek 1. Graf przejść dozwolonych

Przeprowadzono także analizę statystycznych rozkładów czasów trwania (wyrażonych w minutach) poszczególnych stanów eksploatacyjnych. Sprawdzone dopasowanie rzeczywistych obserwacji do wybranych rozkładów teoretycznych (normalnego, log-normalnego, wykładniczego, Gamma i Weibulla). Parametry tych rozkładów estymowano z wykorzystaniem programu Statistica, wykorzystując metodę największej wiarygodności. Jakość dopasowania oceniono porównując rozkłady obserwowanych częstości z oczekiwanymi. Obliczono statystykę testu Kołmogorowa-Smirnowa oraz kryterium informacyjne Akaikego. Na podstawie otrzymanych wyników, jako najbardziej odpowiedni,

wybrano rozkład Gamma. Przykładową analizę przedstawiono dla rozkładu stanu użytkownika -  $S_1$  (rys. 2).



Rysunek 2 Histogram czasów trwania stanu  $S_1$

### 3. Estymacja parametrów modelu semi-Markowa

#### 3.1 Podstawowe charakterystyki

Wnioskiem z przeprowadzonych analiz wstępnych było stwierdzenie braku możliwości zastosowania modelu Markowa (wymaga wykładniczej postaci rozkładów zmiennych) i założenie przeprowadzenia analiz z wykorzystaniem modelu semi-Markowa, dla którego postać rozkładów może być dowolna.

Dla badanego procesu eksploatacji samochodów określono model semi-Markowa o skończonym zbiorze stanów za pomocą markowskiego procesu odnowy, wzorując się na [12, 13, 20]: Dla  $N$  oznaczającego zbiór liczb całkowitych nieujemnych,  $S$  – pewien zbiór skończony,  $R_+$  – zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych, natomiast  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  – przestrzeń probabilistyczną, w której dla każdego  $n \in N$  są określone zmienne losowe:

$$\xi_n: \Omega \rightarrow S \quad (1)$$

$$\vartheta_n: \Omega \rightarrow R_+ \quad (2)$$

Dwuwymiarowy ciąg zmiennych losowych  $\{\xi_n, \vartheta_n: n \in N\}$  nazywany jest markowskim procesem odnowy, jeżeli dla każdego  $n \in N$ ,  $i, j \in S$ ,  $t \in R_+$ :

$$P\{\xi_{n+1} = j, \vartheta_{n+1} < t | \xi_n = i, \xi_{n-1}, \dots, \xi_0, \vartheta_n, \dots, \vartheta_0\} = P\{\xi_{n+1} = j, \vartheta_{n+1} < t | \xi_n = i\} \quad (3)$$

oraz

$$P\{\xi_0 = i, \vartheta_0 = 0\} = P\{\xi_0 = i\} \quad (4)$$

Z definicji tej wynika, że markowski proces odnowy jest szczególnym przypadkiem dwuwymiarowego procesu Markowa [14]. Prawdopodobieństwa przejścia tego procesu

zależą wyłącznie od wartości dyskretnej współrzędnej. Markowski proces odnowy  $\{\xi_n, \vartheta_n: n \in N\}$  nazywany jest jednorodnym, jeżeli prawdopodobieństwa:

$$P\{\xi_{n+1} = j, \vartheta_{n+1} < t | \xi_n = i\} = Q_{ij}(t) \quad (5)$$

nie zależą od  $n$ .

Macierz funkcyjna:

$$Q(t) = [Q_{ij}(t)], i, j \in S \quad (6)$$

nazywana jest jądrem odnowy. W oparciu o jednorodny markowski proces odnowy definiowany jest proces semi- Markowa [14].

Niech:

$$M(t) = \sup \{m \geq 0 : \tau_m \leq t\} \quad (7)$$

gdzie:

$$\tau_m = \vartheta_0 + \vartheta_1 + \dots + \vartheta_m \quad (8)$$

Proces stochastyczny  $\{M(t): t \in R_+\}$  jest stały w przedziale  $[\tau_m, \tau_{m+1})$ . Proces stochastyczny  $\{X(t): t \in R_+\}$  określony wzorem

$$X(t) = \xi_{M(t)} \quad (9)$$

jest modelem semi –Markowa.

Zdefiniowanie modelowego procesu semi-Markowa wymaga, oprócz określenia jądra procesu również jego rozkładu początkowego [13, 17, 38]. Badany proces eksploatacji pojazdów podzielono na trzy fazy o losowych czasach trwania. Wówczas jądro odnowy procesu semi-Markowa, zgodnie z grafem przejść dozwolonych (rys. 1) przyjmuje postać:

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & Q_{12}(t) & Q_{13}(t) \\ Q_{21}(t) & 0 & 0 \\ 0 & Q_{31}(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Macierz ta stanowi model zmian wyróżnionych stanów procesu. Niezerowe elementy  $Q_{ij}(t)$  macierzy  $Q(t)$  są warunkowymi prawdopodobieństwami przejścia procesu ze stanu  $S_i$  do stanu  $S_j$ , w czasie nie większym niż  $t$ , określonymi wg wzoru (11). Zależą one od rozkładu zmiennych losowych, którymi są długości czasu przebywania procesu w wyróżnionych stanach.

$$Q_{ij}(t) = P(X(\tau_{m+1}) = j, \tau_{m+1} - \tau_m \leq t | X(\tau_m) = i) \text{ dla } t \geq 0 \quad (11)$$

gdzie zmienna losowa  $\tau_m$  oznacza chwilę  $m$ -tej zmiany stanu

Rozkład początkowy:  $p_i(0), i \in S = \{1, 2, 3\}$  przyjęto w postaci:

$$p_i(0) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = 1 \\ 0, & \text{gdy } i \neq 1 \end{cases} \quad (12)$$

gdzie:

$$p_i(0) = P\{X(0) = i\}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (13)$$

Elementy te pozwalają wyznaczyć poszukiwane parametry probabilistyczne procesu eksploatacyjnego. Dla modelu semi-Markowa istotne są prawdopodobieństwa przejścia, zdefiniowane jako prawdopodobieństwa warunkowe [15]:

$$P_{ij}(t) = P\{X(t) = j | X(0) = i\}, \quad i, j \in S \quad (14)$$

$P_{ij}(t)$  są to prawdopodobieństwa przejścia ze stanu  $S_i$  do stanu  $S_j$  w chwili  $t$ . Obliczono je na podstawie rzeczywistych relacji międzystanowych, wg wzoru (15).

$$p_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_{k \in S} n_{ik}} \quad (15)$$

gdzie:

$n_{ij}$  – liczba przejść ze stanu  $S_i$  do stanu  $S_j$ ,

$\sum_{k \in S} n_{ik}$  – liczba wszystkich przejść (wyjść) ze stanu  $S_i$ ,

Rozkład prawdopodobieństwa zmian wyróżnionych stanów eksploatacyjnych (w jednym kroku), przy założeniu, że każdemu łukowi grafu odwzorowania procesu eksploatacji (rys. 1), łączącemu dwa stany procesu, odpowiada wartość prawdopodobieństwa  $p_{ij}$  zawiera tab. 1.

Tabela 1. Macierz prawdopodobieństw przejść  $p_{ij}$

$p_{ij}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$S_1$	0	0,8	0,2
$S_2$	1	0	0
$S_3$	0	1	0

Obliczone wartości prawdopodobieństw przejść dotyczą zbiorów stanów, a nie okresu czasu. Np.  $p_{13} = 0,2$  oznacza, że wśród wszystkich wyjść ze stanu  $S_1$  przejścia ze stanu  $S_1$  do  $S_2$  stanowią 20%.

### 3.2 Własności graniczne

Ważną rolę w badaniu procesu eksploatacji samochodów modelowanych łańcuchem Markowa pełnią jego własności graniczne [13, 20], a szczególnie granice prawdopodobieństw  $p_j(n)$  oraz  $p_{ij}(n)$  przy  $n \rightarrow \infty$ , które opisują zachowanie procesu po długim czasie [13, 36]. Istotnym pojęciem w tej kwestii jest rozkład stacjonarny jednorodnego łańcucha Markowa, opisywany wektorem  $\Pi$  [14]:

$$\Pi = [\pi_1, \pi_2, \pi_3] \quad (16)$$

takim, że:

$$\Pi = \Pi P \quad (17)$$

gdzie

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \quad (18)$$

oraz

$$\sum_{j=1}^3 \pi_j = 1 \quad (19)$$

oznacza to, że jeżeli łańcuch w pewnej chwili  $m$  osiągnie rozkład stacjonarny, to dla każdej kolejnej chwili  $n$ , większej od  $m$ , rozkład bezwarunkowy pozostanie taki sam.

Dla badanego procesu istnieją granice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = \pi_j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (20)$$

gdzie:

$p_{ij}(n)$  – prawdopodobieństwo przejścia ze stanu  $S_i$  do stanu  $S_j$  w  $n$  krokach.

Obliczona macierz prawdopodobieństw zmian stanów eksploatacyjnych włożonego w proces łańcucha Markowa (tab. 1), umożliwiła wyznaczenie prawdopodobieństw stacjonarnych  $\pi_j$ , zgodnie z układem równań (17).

Dla badanego procesu, dla modelu 3-stanowego, oszacowanie prawdopodobieństw stacjonarnych  $\pi_j$  wymagało rozwiązania równania macierzowego:

$$\begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & 0 & 0 \\ 0 & p_{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix}^T \quad (21)$$

z warunkiem normalizacji:

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \quad (22)$$

co jest równoważne następującemu układowi równań:

$$\begin{cases} \pi_2 \cdot p_{21} = \pi_1 \\ \pi_1 \cdot p_{12} + \pi_3 \cdot p_{32} = \pi_2 \\ \pi_1 \cdot p_{13} = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \quad (23)$$

Po podstawieniu wartości prawdopodobieństw przejść (tab. 1) otrzymujemy:

$$\begin{cases} \pi_2 = \pi_1 \\ 0,8 \pi_1 + \pi_3 = \pi_2 \\ 0,2 \pi_1 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \quad (24)$$

Rozwiązanie układu równań przedstawia tab. 2.

Tabela 2. Prawdopodobieństwa stacjonarne  $\pi_j$  wyróżnionych stanów eksploatacyjnych

	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$\pi_i$	0,455	0,455	0,09
$\pi_i$ [%]	45,5	45,5	9

W następnej kolejności, na podstawie grafu skierowanego (rys. 1), określającego prawdopodobieństwa przejść stanów łańcucha Markowa (tab. 1), oraz na podstawie

empirycznych czasów  $t_{ij}$  trwania poszczególnych stanów dokonano estymacji warunkowych wartości oczekiwanych  $E(T_{ij})$  czasów trwania stanów procesu  $X(t)$  na podstawie estymatora określonego wzorem (24)

$$\widehat{E(T_{ij})} = \bar{T}_{ij} = \frac{t_{ij}}{\sum_{j \in S} t_{ij}} \quad (25)$$

Macierz  $\bar{T} = [\bar{T}_{ij}]$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  oszacowanych warunkowych wartości oczekiwanych czasów  $T_{ij}$  przedstawiono w tab. 3.

Tabela 3. Oszacowane wartości oczekiwane warunkowych czasów  $T_{ij}$

$\bar{T}_{ij}$ [minuty]	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$S_1$		844	845
$S_2$	479		
$S_3$		388	

Znajomość elementów macierzy  $P$  i  $\bar{T}$  pozwala na oszacowanie wartości oczekiwanych  $ET_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  bezwarunkowych czasów trwania poszczególnych stanów procesu, wg zależności:

$$\widehat{ET}_i = \bar{T}_i = \sum_{j=1}^3 p_{ij} \cdot \bar{T}_{ij} \quad (26)$$

Dla badanego 3-stanowego procesu użytkowania pojazdów problem oszacowania wartości oczekiwanych bezwarunkowych czasów trwania poszczególnych stanów procesu sprowadził się do rozwiązania następującego układu równań:

$$\begin{cases} \bar{T}_1 = p_{12} \cdot \bar{T}_{12} + p_{13} \cdot \bar{T}_{13} \\ \bar{T}_2 = p_{21} \cdot \bar{T}_{21} \\ \bar{T}_3 = p_{32} \cdot \bar{T}_{32} \end{cases} \quad (27)$$

Oszacowane wartości bezwarunkowych czasów  $\bar{T}_i$  przedstawiono w tab. 4.

Tabela 4. Bezwarunkowe czasy  $\bar{T}_i$  [minuty] przebywania procesu w 3 stanach eksploatacyjnych

stan	$\bar{T}_i$ [minuty]
1	844,2
2	479
3	388

Zmienne losowe  $T_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  mają skończone, dodatnie wartości oczekiwane. Pozwala to na wyznaczenie rozkładu granicznego procesu semi-Markowa. W oparciu o rozkład stacjonarny włożonego łańcucha Markowa (tab. 2) oraz oszacowane wartości oczekiwane czasów trwania procesu (tab.4) estymowano prawdopodobieństwa graniczne, zgodnie ze wzorem (28) [20].

$$P_i = \frac{\pi_i \cdot \bar{T}_i}{\sum_{k \in S} \pi_k \cdot \bar{T}_k}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (28)$$



Obliczony, graniczny rozkład prawdopodobieństwa stanów procesu semi-Markowa, przedstawiono w tab. 5.

Tabela 5. Rozkład prawdopodobieństw granicznych  $P_i$

Rozkład	$P_1$	$P_2$	$P_3$
prawdopodobieństwa	0,6026	0,3419	0,0555
procentowy	60	34	6

Wartości  $P_i$  są granicznymi prawdopodobieństwami określającymi, że w długim okresie eksploatacji ( $t \rightarrow \infty$ ) pojazd będzie przebywał w danym stanie eksploatacyjnym.

Największe wartości osiągnięto dla stanu użytkowanie (60%), co jest bardzo dobrym wynikiem. Postój użytkowy osiąga graniczną wartość wynoszącą 34%, co również jest zadowalającym rezultatem i świadczy z jednej strony o dużej gotowości badanych pojazdów, a z drugiej o znacznej rezerwie, która jednak w przypadku struktur działających w sposób nieprzewidywany, interwencyjny wydaje się być racjonalną. W stanie napraw pojazdy przebywają granicznie jedynie z 5,5% prawdopodobieństwem.

Współczynnik gotowości technicznej  $K$  jest sumą odpowiednich prawdopodobieństw stanów niezawodnościowych. Dla zaproponowanego modelu eksploatacji pojazdów stany zdatności stanowią stan  $S_1$  oraz  $S_2$ , natomiast stan  $S_3$  jest stanem niezdatności. Stąd gotowość badanych pojazdów można obliczyć jako sumę prawdopodobieństw granicznych stanów  $S_1$  i  $S_2$ :

$$K = P_1 + P_2 \quad (29)$$

Obliczony współczynnik gotowości wynosi  $K = 94,45$  i oznacza, że niemal 95% czasu pojazdy badanej grupy pojazdów pozostają w stanie gotowości technicznej.

### 3.3 Czas pierwszego przejścia procesu eksploatacji pojazdu do podzbioru stanów (czas bezawaryjnej pracy)

Kolejną, ważną charakterystyką opisującą procesy eksploatacji pojazdów, jest czas pierwszego przejścia rozpatrywanego procesu do wyodrębnionego stanu lub zbioru stanów  $\{A\}$  [18]. Na podstawie zidentyfikowania rozkładu tego czasu i jego parametrów można wyznaczyć prawdopodobieństwo przebywania pojazdów w określonym stanie lub zbiorze stanów [20, 37]. Funkcja postaci:

$$\Phi_{iA}(t) = P(\Theta_A \leq t | X(0) = i), t \geq 0 \quad (30)$$

jest dystrybuantą rozkładu zmiennej losowej  $\Theta_A = \tau_{\Delta_A}$ , która oznacza czas upływający od chwili przyjęcia przez proces semi-Markowa wartości  $i \in A'$  do chwili, w której proces przyjmie jakąkolwiek wartość z podzbioru stanów  $A$ , gdzie  $A \subset S$  oraz  $A' = S - A$ . natomiast:

$$\Delta_A = \min \{n \in N: X(\tau_n) \in A\} \quad (31)$$

Dla regularnych procesów semi-Markowa, w których podzbiór  $A$  jest silnie osiągalny z każdego stanu należącego do  $A'$ , zmienne losowe  $T_{ij}$  mają skończone i dodatnie wartości oczekiwane  $E(T_{ij})$ , istnieją wartości oczekiwane  $E(\Theta_{A'})$  i są one jedynymi rozwiązaniami układu równań [13, 20]:

$$(I - P_{A'})\bar{\Theta}_{A'} = T_{A'} \quad (32)$$

gdzie:

$P_{A'}$  - macierz prawdopodobieństw przejść w zbiorze  $A'$

$\bar{\Theta}_{A'}$  - jądro procesu określone w zbiorze  $A'$

$T_{A'}$  - zmienne losowe bezwarunkowych czasów przebywania procesu w zbiorze stanów  $A'$

Ponieważ w rozważanym procesie zadanie transportowe zostanie wykonane, jeżeli nie nastąpi awaria środka transportu, to rozkład czasu wykonania zadania (bezawaryjnej pracy systemu) można znaleźć redukując pierwotny model o stan  $S_3$  - naprawa. Wówczas podzbiór stanów  $A' = \{S_1, S_2\}$ , natomiast podzbiór stanów  $A = \{S_3\}$ , a elementy równania (32) mają postać:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Theta}_{A'} = \begin{bmatrix} \bar{\Theta}_{13} \\ \bar{\Theta}_{23} \end{bmatrix}, \quad \bar{T}_{A'} = \begin{bmatrix} E(T_1) \\ E(T_2) \end{bmatrix}, \quad (33)$$

$$P_{A'}(s) = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} \\ p_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

gdzie:

$$P_{A'} = [p_{ik}] \quad i, k \in A' \quad (35)$$

jest podmacierzą macierzy  $P_{ij}$  (tab. 1). Zmienna losowa  $\Theta_{ij}$  oznacza czas, który upłynął od chwili początkowej do chwili, w której po raz pierwszy zostanie osiągnięty stan naprawy, pod warunkiem, że w chwili uważanej za początkową rozpoczął się jeden ze stanów ze zbioru  $A'$ . Oznacza zatem czas bezawaryjnej eksploatacji systemu. Dla analizowanego modelu semi-Markowa, równanie macierzowe (32) jest postaci:

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & p_{12} \\ p_{21} & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \bar{\Theta}_{13} \\ \bar{\Theta}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(T_1) \\ E(T_2) \end{bmatrix} \quad (36)$$

Po podstawieniu odpowiednich wartości z tab.1 i tab.4 otrzymujemy :

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0,8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \bar{\Theta}_{13} \\ \bar{\Theta}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 844,2 \\ 479 \end{bmatrix} \quad (37)$$

co sprowadza się do rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} \bar{\Theta}_{13} - 0,8 \bar{\Theta}_{23} = 844,2 \\ -\bar{\Theta}_{13} + \bar{\Theta}_{23} = 479 \end{cases} \quad (38)$$

Wyniki obliczeń powyższego układu równań przedstawia tab. 6.

Tabela 6. Wartości elementów macierzy  $\bar{\Theta}$  czasu pierwszego przejścia dla ogółu pojazdów

$\bar{\Theta}$	[min]	[h]
$\bar{\Theta}_{13}$	6137	102,3
$\bar{\Theta}_{23}$	6616	110,3

Jeżeli rozkładem początkowym procesu eksploatacji jest wektor:

$$p = [p_1, p_2, p_3] \quad (39)$$

który w badanym procesie, zgodnie z pierwotnym założeniem (12) jest postaci:

$$p = [1, 0, 0] \quad (40)$$

wówczas pierwszy wiersz jednokolumnowej macierzy, stanowiącej rozwiązanie tego równania, jest wartością oczekiwaną czasu wykonania zadania, która w tym przypadku wynosi ponad 102 godziny.

Możliwe jest również wyznaczenie rozkładu czasu poprawnej pracy obiektu. Korzystając z informacji, że prawdopodobieństwa przejścia  $P_{ij}(t)$ , zdefiniowane jako prawdopodobieństwa warunkowe [20]:

$$P_{ij}(t) = P\{X(t) = j | X(0) = i\}, \quad i, j \in S \quad (41)$$

spełniają równania Fellera:

$$P_{ij}(t) = \delta_{ij}[1 - G_i(t)] + \sum_{k \in S} \int_0^t P_{kj}(t-x) dQ_{ik}(x), \quad i, j \in S \quad (42)$$

można znaleźć rozwiązanie tego układu posługując się przekształceniem Laplace'a – Stieltjesa:

$$\tilde{p}_{ij}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dP_{ij}(t) \quad (43)$$

$$\tilde{q}_{ik}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dQ_{ik}(t) \quad (44)$$

$$\tilde{g}_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} dG_i(t) \quad (45)$$

gdzie  $Q_{ik}(t)$  to jądro procesu odnowy podzbioru stanów  $A'$  natomiast  $G_i(t)$  oznacza dystrybuantę zmiennej losowej  $T_i$  czasu trwania  $i$ -tego stanu procesu semi-Markowa, niezależnie od tego do jakiego stanu następuje przejście w chwili  $\tau_{n+1}$  [13]:

$$G_i(t) = P\{T_i < t\} = P\{\tau_{n+1} - \tau_n < t | X(\tau_n) = i\}, i \in S \quad (46)$$

Wówczas powyższemu układowi równań całkowych odpowiada układ równań algebraicznych, o niewiadomych transformatach  $p_{ij}(s)$ ,  $i, j \in S$ :

$$\tilde{p}_{ij}(s) = \delta_{ij} \left[ \frac{1 - \tilde{g}_i(s)}{s} \right] + \sum_{k \in S} \tilde{q}_{ik}(s) \tilde{p}_{kj}(s), \quad i, j \in S \quad (47)$$

układ ten w notacji macierzowej ma postać:

$$\tilde{P}(s) = \frac{1}{s} [I - \tilde{q}(s)]^{-1} [1 - \tilde{g}(s)] \quad (48)$$

Po rozwiązaniu otrzymuje się macierz transformat. Ponieważ stanem początkowym jest stan  $S_1$ , więc pierwszy wiersz jest jednocześnie jednowymiarowym rozkładem procesu.

Dla badanego systemu:

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & Q_{12}(t) \\ Q_{21}(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

gdzie  $Q_{12}(t)$  oraz  $Q_{21}(t)$  są dystrybuantami estymowanych rozkładów Gamma:

$$Q_{12}(t) = \frac{e^{-\frac{t}{\beta_1}} t^{-1+\alpha_1} \beta^{-\alpha_1}}{\Gamma[\alpha_1]}, \quad t > 0 \quad (50)$$

$$Q_{21}(t) = \frac{e^{-\frac{t}{\beta_2} t^{-1+\alpha_2} \beta^{-\alpha_2}}}{\Gamma[\alpha_2]} \quad t > 0 \quad (51)$$

oraz

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} \quad (52)$$

ponieważ dla rozkładu Gamma transformata Laplace'a – Stieltjesa jest postaci:

$$\tilde{f}(s) = \left( \frac{\beta}{\beta + s} \right)^\alpha \quad (53)$$

stąd elementy równania (48) mają postać:

$$\frac{1}{s} [I - \tilde{q}(s)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{0.1}{s(1 - \beta_1^{\alpha_1}(s + \beta_1)^{-\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2}(s + \beta_2)^{-\alpha_1})} & \frac{0.1 \beta_1^{\alpha_1}(s + \beta_1)^{-\alpha_1}}{s(1 - \beta_1^{\alpha_1}(s + \beta_1)^{-\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2}(s + \beta_2)^{-\alpha_1})} \\ \frac{0.1 \beta_2^{\alpha_2}(s + \beta_2)^{-\alpha_1}}{s(1 - \beta_1^{\alpha_1}(s + \beta_1)^{-\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2}(s + \beta_2)^{-\alpha_1})} & \frac{0.1}{s(1 - \beta_1^{\alpha_1}(s + \beta_1)^{-\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2}(s + \beta_2)^{-\alpha_1})} \end{bmatrix} \quad (54)$$

oraz

$$[1 - \tilde{g}(s)] = \begin{bmatrix} 1 - \beta_1^{\alpha_1}(s + \beta_1)^{-\alpha_1} & 1 \\ 1 & 1 - \beta_2^{\alpha_2}(s + \beta_2)^{-\alpha_1} \end{bmatrix} \quad (55)$$

Rozwiązaniem jest macierz, której elementy pierwszej wiersza wynoszą:

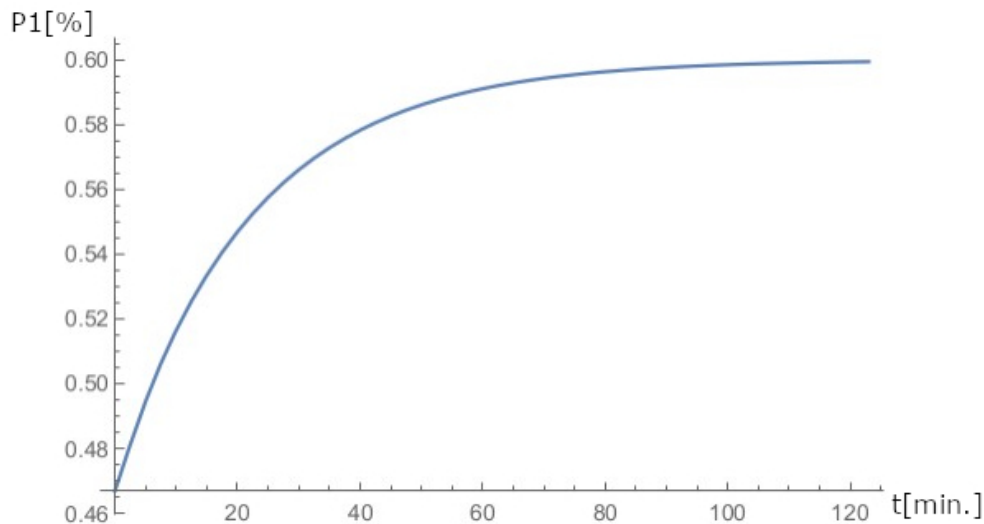
$$\tilde{P}_1(s) = \frac{0.1 \beta_1^{\alpha_1}(s + \beta_1)^{-\alpha_1}}{s(1 - \beta_1^{\alpha_1}(s + \beta_1)^{-\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2}(s + \beta_2)^{-\alpha_1})} + \frac{0.1(1 - \beta_1^{\alpha_1}(s + \beta_1)^{-\alpha_1})}{s(1 - \beta_1^{\alpha_1}(s + \beta_1)^{-\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2}(s + \beta_2)^{-\alpha_1})} \quad (56)$$

$$\tilde{P}_2(s) = \frac{0.1}{s(1 - \beta_1^{\alpha_1}(s + \beta_1)^{-\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2}(s + \beta_2)^{-\alpha_1})} + \frac{0.1 \beta_1^{\alpha_1}(s + \beta_1)^{-\alpha_1}(1 - \beta_2^{\alpha_2}(s + \beta_2)^{-\alpha_1})}{s(1 - \beta_1^{\alpha_1}(s + \beta_1)^{-\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2}(s + \beta_2)^{-\alpha_1})} \quad (57)$$

Po obliczeniu transformat odwrotnych otrzymuje się rozkład graniczny intensywności użytkowania obiektu. Dla stanu  $S_1$  otrzymujemy funkcję postaci:

$$P_1(t) = 0.0026857 e^{-0.66956t} - 0.006151 e^{-0.23043t} - 0.129546 e^{-0.0446957t} + 0.6 \quad (58)$$

Wykres tej funkcji przedstawia rys. 3



Rysunek 3. Wykres funkcji  $P_1(t)$

Funkcja stabilizuje się w czasie około 120 minut, a w granicy, dla  $t \rightarrow \infty$ , dąży do wcześniej obliczonej wartości granicznej procesu semi-Markowa wynoszącej  $P_1 = 60\%$ .

#### 4. Wnioski

Zastosowanie procesów semi -Markowa pozwala na wyznaczenie granicznego współczynnika gotowości oraz analizę czasów przebywania pojazdów specjalnych w wyróżnionych stanach eksploatacyjnych. Umożliwia także obiektywną ocenę intensywności użytkowania pojazdu i czasu jego bezawaryjnej pracy. Analizując czynniki gotowości można poszukiwać optymalnych algorytmów użytkowania i obsługi pojazdów, a także analizować jakość doboru floty pojazdów.

Słuszność powyższych założeń potwierdziły zrealizowane badania. Zaproponowany model semi-Markowa umożliwił diagnostykę systemu eksploatacji radiowozów policyjnych wskazując, że charakteryzuje się on zadowalającym poziomem prawdopodobieństwa przebywania pojazdów w stanie użytkowania ( $P_1 = 0,6$ ) oraz w stanie postoju użytkowego ( $P_2 = 0,34$ ). Prognozowany współczynnik gotowości technicznej wyniósł  $K = 95\%$ .

Wykazano zatem skuteczność zastosowania procesów semi-Markowa do modelowania gotowości systemów eksploatacji pojazdów specjalnych. Model trzystanowy wyróżniający stan użytkowania pojazdu i stan postoju użytkowego oraz stan naprawy (obsługiwanie technicznego) okazał się uzasadniony. W tym przypadku nie było konieczne tworzenie rozbudowanych, wielostanowych struktur modelu procesu eksploatacji wymagających zaawansowanych programów obliczeniowych. Zaprezentowany, trzystanowy model jest możliwy do rozbudowy w sytuacji, kiedy konieczna byłaby pogłębiona analiza wybranych aspektów gotowości systemu.

#### Bibliografia

1. Andrzejczak K, Młyńczak M, Selech J. Poisson-distributed failures in the predicting of the cost of corrective maintenance. *Eksploatacja I Niezawodność - Maintenance and Reliability* 2018; 20(4): 602-609, <https://doi.org/10.17531/ein.2018.4.11>.
2. Bain L.J, Engelhardt M. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Second Edition. California: Cengage Learning, 2000.

3. Becker L.R, Zaloshnja E, Levick N, Guohua L, Miller T. R. Relative risk of injury and death in ambulances and other emergency vehicles. *Accident Analysis & Prevention* 2003; 35(6): 941-948, [https://doi.org/10.1016/S0001-4575\(02\)00102-1](https://doi.org/10.1016/S0001-4575(02)00102-1).
4. Behm G.W, Huber W.B, Noll A.J, Pelaez R. A Method and system for safe emergency vehicle operation using route calculation. United States Patent US8842021B2, 2014.
5. Cheng Q, Sun B, Zhao Y, Gu P. A method to analyze the machining accuracy reliability sensitivity of machine tools based on Fast Markov Chain simulation. *Podejście do analizy czułości niezawodnościowej dokładności obrabiarek oparte na symulacji metodą szybkich łańcuchów Markowa. Eksploatacja i Niezawodność - Maintenance and Reliability* 2016; 18 (4): 552-564, <https://doi.org/10.17531/ein.2016.4.10>.
6. Chu H. C. Risk factors for the severity of injury incurred in crashes involving on-duty police cars. *Traffic injury prevention* 2016, (5)17: 495-501, <https://doi.org/10.1080/15389588.2015.1109082>.
7. Dekker R, Nicolai R.P, Kallenberg L.C.M, *Maintenance and Markov decision models*. In *Wiley StatsRef: Statistics Reference Online* (eds Balakrishnan N, Colton T, Everitt B, Piegorsch W, Ruggeri F, Teugels J.L.). John Wiley & Sons, 2014, <https://doi.org/10.1002/9781118445112.stat03960>.
8. Dinc S, Dinc I. Evaluation of Unsupervised Classification on Police Patrol Zone Design Problem. *SoutheastCon* 2018. St Petersburg, 2018: 1-7, <https://doi.org/10.1109/SECON.2018.8478908>.
9. Dong W, Liu S, Yang X, Wang H, Fang Z. Balancing reliability and maintenance cost rate of multi-state components with fault interval omission. *Eksploatacja I Niezawodność - Maintenance and Reliability* 2019; 21(1): 37-45, <https://doi.org/10.17531/ein.2019.1.5>.
10. Elliott T, Payne A, Atkison T, Smith R. Algorithms in Law Enforcement: Toward Optimal Patrol and Deployment Algorithms. *Proceedings of the 2018 International Conference on Information and Knowledge Engineering IKE'18*. Las Vegas, 2018: 93-99.
11. Ge H, Tomasevicz C.L, Asgarpoor S. Optimum Maintenance Policy with Inspection by Semi-Markov Decision Processes. *39th North American Power Symposium, Las Cruces*, 2007: 541-546, <https://doi.org/10.1109/NAPS.2007.4402363>.
12. Girtler J, Słęczak M. Application of the theory of semi-Markov processes to the development of a reliability model of an automotive vehicle. *Archiwum Motoryzacji* 2012; 2: 15-27, <https://doi.org/10.5604/1234754X.1066721>.
13. Grabski F. *Semi-Markov Processes. Applications in System Reliability and Maintenance*. Elsevier, 2015, <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-800518-7.00004-1>.
14. Grabski F. *Teoria semi-Markowskich procesów eksploatacji obiektów technicznych. - The theory of semi-Markov processes of technical object exploitation* Gdynia: Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Marynarki Wojennej 75A, 1982.
15. Hong W, Zhou K. A note on the passage time of finite-state Markov chains. *Communications in Statistics - Theory and Methods* 2017; 46(1): 438-445, <https://doi.org/10.1080/03610926.2014.995825>.
16. Hu L, Su P, Peng R, Zhang Z. Fuzzy Availability Assessment for Discrete Time Multi-State System under Minor Failures and Repairs by Using Fuzzy Lz-transform. *Eksploatacja i Niezawodność - Maintenance and Reliability* 2017; 19 (2): 179-190, <https://doi.org/10.17531/ein.2017.2.5>.
17. Huang X.X, Zou X.L, Guo X.P. A minimization problem of the risk probability in first passage semi-Markov decision processes with loss rates. *Science China Mathematics* 2015, 58: 1923 - 1938, <https://doi.org/10.1007/s11425-015-5029-x>.

18. Hunter J.J. The computation of the mean first passage times for Markov chains. *Linear Algebra and its Applications* 2018; 549: 100-122, <https://doi.org/10.1016/j.laa.2018.03.010>.
19. Iscioglu F, Kocak A. Dynamic reliability analysis of a multi-state manufacturing system. *Eksploatacja i Niezawodność - Maintenance and Reliability* 2019; 21 (3): 451-459, <https://doi.org/10.17531/ein.2019.3.11>.
20. Jazwiński J, Grabski F. Niektóre problemy modelowania systemów transportowych - Selected problems of transport system modelling. Radom: Instytut Technologii Eksploatacji, 2003.
21. Kaczor G. Modelowanie i ocena niezawodności systemu transportu intermodalnego - Modelling and assessment of the reliability of the intermodal transport system. *Logistyka* 2015; 3: 2047-2054.
22. Kolesar P.J, Rider K.L, Crabill T.B, Walker W.E. A Queuing-Linear Programming Approach to Scheduling Police Patrol Cars. *Operations Research* 1975; 23(6):1045-1062, <https://doi.org/10.1287/opre.23.6.1045>.
23. Landowski B, Muślewski Ł, Knopik L, Bojar P. Semi-Markov model of quality state changes of a selected transport system. *Journal of KONES* 2017; 24(4): 141-148.
24. Lu J-M, Lundteigen M.A, Liu Y, Wu X-Y. Flexible truncation method for the reliability assessment of phased mission systems with repairable components. *Eksploatacja i Niezawodność - Maintenance and Reliability* 2016; 18 (2): 229-236, <https://doi.org/10.17531/ein.2016.2.10>.
25. Lundälv J, Philipson Ch, Sarre R. How do we reduce the risk of deaths and injuries from incidents involving police cars? Understanding injury prevention in the Swedish context. *Police Practice and Research* 2010; 11(5): 437-450, <https://doi.org/10.1080/15614263.2010.497333>.
26. Lyons H.W. Integrated warning light and rear-view mirror. United States Patent 5851064, 1998.
27. Michaelson E.B. Bulletproof blanket for use with law enforcement vehicles such as police cars. United States Patent 6161462, 2000.
28. Migawa K. Availability control for means of transport in decisive semi-Markov models of exploitation process. *Archives of Transport* 2012; 4(24): 497-508, <https://doi.org/10.2478/v10174-012-0030-4>.
29. Młyńczak M. Metodyka badań eksploatacyjnych obiektów mechanicznych - Methodology of exploitation tests of mechanical objects. Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2012.
30. Muślewski Ł. Control Method for Transport System Operational Quality. *Journal of KONES* 2009; 3(16): 275-282.
31. Restel F. The Markov reliability and safety model of the railway transportation system. *Safety and Reliability: Methodology and Applications Proceeding of the European Safety and Reliability Conference*. London, 2014: 303-311, <https://doi.org/10.1201/b17399-46>.
32. Świdorski A. Inżynieria jakości w wybranych obszarach transportu - Quality engineering in selected areas of transport. Warszawa: Instytut Transportu Samochodowego (Motor Transport Institute), Warszawa 2018.
33. Szawłowski S. Analiza wpływu systemu obsługi na gotowość techniczną śmigłowca pokładowego SH-2G - Analysis of the impact of the maintenance system on the technical readiness of the SH-2G ship-based helicopter. *Prace Instytutu Lotnictwa* 2008; 3-4 (194-195): 326-331.
34. Thomas O.S, Sobanjo J.O. Semi-Markov Decision Process: A Decision Tool for Transportation Infrastructure Management Systems. *International Conference on*

- Transportation and Development: Projects and Practices for Prosperity 2016: 384 - 396, <https://doi.org/10.1061/9780784479926.036>.
35. Woropay M, Żurek J, Migawa K. Model of assessment and shaping of operational readiness of the maintenance subsystem in the transport system. Radom: Instytut Technologii Eksploatacji, 2003.
  36. Wu X, Zhang J. Finite approximation of the first passage models for discrete-time Markov decision processes with varying discount factors. *Discrete Event Dynamic Systems* 2016; 26(4): 669 - 683, <https://doi.org/10.1007/s10626-014-0209-3>.
  37. Wu X, Zou X, Guo X. First passage Markov decision processes with constraints and varying discount factors. *Frontiers of Mathematics in China* 2015; 10(4): 1005-1023, <https://doi.org/10.1007/s11464-015-0479-6>.
  38. Xie W, Hong Y, Trivedi K. Analysis of a two-level software rejuvenation policy. *Reliability Engineering & System Safety* 2005; 87: 13-22, <https://doi.org/10.1016/j.ress.2004.02.011>.
  39. Żurek J, Tomaszewska J. Analysis of the exploitation system from the standpoint of readiness, *Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej*, Warszawa 2016; 114: 471 -477.